Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2017/2018
07/02/2018

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{aligned} X(t,X_0) &= X_0+\int_0^t ds\left[s^2X(s)+e^{-s}\right]+\int_0^t sdB(s)\ , \\ dX(t) &= \left[t^2X(t)+e^{-t}\right]dt+tdB(t)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

dove $(B(t)\ ,\ t\geq 0)$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0=0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t)\ ,\ t\geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(X(2,X_0),X(1,X_0))$ *dove il processo stocastico* $(X(t,X_0)\ ,\ t\geq 0)$ *è dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô di cui al precedente punto 1.*

Soluzione:

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$Y(t)=f(t,X(t)):=X(t)e^{-\int_0^t dss^2}=X(t)e^{-\frac{t^3}{3}} \tag{2}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} df(t,X(t)) = &\left\{(\partial_t f)(t,X(t))+(\partial_x f)(t,X(t))\left[t^2X(t)+e^{-t}\right]+\frac{1}{2}t^2\left(\partial_x^2 f\right)(t,X(t))\right\}dt \\ &+t(\partial_x f)(t,X(t))dB(t)\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Ovvero, poiché $f(t,x)=xe^{-\frac{t^3}{3}}$, e

$$\partial_t f(t,x)=-t^2f(t,x)\ , \tag{4}$$

$$\partial_x f(t,x)=\frac{f(t,x)}{x}\ , \tag{5}$$

$$\partial_x^2 f(t,x)=0\ , \tag{6}$$

si ha

$$dY(t) = e^{-\left(\frac{t^3}{3}+t\right)}dt + te^{-\frac{t^3}{3}}dB(t) \tag{7}$$

cioè, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + \int_0^t e^{-\left(\frac{s^3}{3}+s\right)}ds + \int_0^t se^{-\frac{s^3}{3}}dB(s) \ , \tag{8}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= e^{\frac{t^3}{3}}Y(t, X_0) \\ &= e^{\frac{t^3}{3}}\left[X_0 + \int_0^t e^{-\left(\frac{s^3}{3}+s\right)}ds + \int_0^t se^{-\frac{s^3}{3}}dB(s)\right] \ . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Ponendo $X_0 = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t, X_0)] &= e^{\frac{t^3}{3}}\left\{\int_0^t e^{-\left(\frac{s^3}{3}+s\right)}ds + \mathbb{E}\left[\int_0^t se^{-\frac{s^3}{3}}dB(s)\right]\right\} = \\ &= e^{\frac{t^3}{3}}\int_0^t e^{-\left(\frac{s^3}{3}+s\right)}ds \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &= \mathbb{E}[(X(t, X_0) - \mathbb{E}[X(t, X_0)])(X(s, X_0) - \mathbb{E}[X(s, X_0)])] \\ &= e^{\frac{t^3+s^3}{3}}\int_0^{t\wedge s} d\tau\tau^2 e^{-\frac{2}{3}\tau^3} = \frac{e^{\frac{t^3+s^3}{3}}}{2}\int_0^{\frac{2}{3}(t\wedge s)^3} due^{-u} \\ &= \frac{e^{\frac{t^3+s^3}{3}}}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{3}(t\wedge s)^3}\right) \ . \end{aligned} \tag{11}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y \ :&= (X(2, X_0), X(1, X_0)) = (X(2,0), X(1,0)) \\ &= \left(e^{-\frac{8}{3}}\left[\int_0^2 e^{-\left(\frac{t^3}{3}+t\right)}dt + \int_0^2 te^{-\frac{t^3}{3}}dB(t)\right],\right. \\ &\quad \left. e^{-\frac{1}{3}}\left[\int_0^1 e^{-\left(\frac{t^3}{3}+t\right)}dt + \int_0^1 te^{-\frac{t^3}{3}}dB(t)\right]\right) \end{aligned} \tag{12}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(e^{-\frac{8}{3}}\int_0^2 e^{-\left(\frac{t^3}{3}+t\right)}dt, e^{-\frac{1}{3}}\int_0^1 e^{-\left(\frac{t^3}{3}+t\right)}dt\right) = (\mu_1, \mu_2) \tag{13}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$C \ := \begin{pmatrix} \frac{\left(e^{\frac{16}{3}}-1\right)}{2} & \frac{e^3}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{3}}\right) \\ \frac{e^3}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{3}}\right) & \frac{e^{\frac{2}{3}}-1}{2} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ . \tag{15}$$

Quindi, $\forall\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad : &= \mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda,Y\rangle}\right] = e^{i\langle\lambda,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda,\lambda\rangle} \\ &= e^{i(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2\right)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

■

Esercizio 2 *Calcolare la distribuzione di probabilità del processo stocastico* $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ *tale che* $\forall t \geq 0, X(t) := \sigma B(t)$, *dove* σ *è una costante positiva e* $(B(t)\ ,\ t \geq 0)$ *è il moto browniano, condizionato all'evento* $\{X(1) = 0\}$.

Soluzione: $\forall t \in [0,1], \sigma B(1) = \sigma B(t) + \sigma(B(1) - B(t))$, ma siccome $B(1) - B(t) \stackrel{d}{=} B(1-t)$, e poiché $\forall t \geq 0, \sigma B(t) \stackrel{d}{=} B(\sigma^2 t)$,

$$\sigma(B(1) - B(t)) \stackrel{d}{=} \sigma B(1-t) \stackrel{d}{=} B\left(\sigma^2(1-t)\right)\ . \tag{17}$$

Inoltre, poiché le variabili aleatorie $B(t)$ e $(B(1) - B(t))$ sono indipendenti, anche $B\left(\sigma^2 t\right)$ e $B\left(\sigma^2(1-t)\right)$ lo sono. Quindi, $\forall t \in (0,1)$, la v.a. $\sigma B(1)$ ha distribuzione di probabilità pari a quella della somma delle componenti del vettore aleatorio

$$\mathbf{V}(t) := (\sigma B(t), \sigma(B(1) - B(t))) \stackrel{d}{=} \left(B\left(\sigma^2 t\right), B\left(\sigma^2(1-t)\right)\right) \tag{18}$$

che sono tra loro indipendenti. Perciò poiché la distribuzione di probabilità di $\mathbf{V}(t)$ ha densità,

$$\frac{\mathbb{P}\left\{B\left(\sigma^2 t\right) \in dx, B\left(\sigma^2(1-t)\right) \in dy\right\}}{dxdy} = \frac{e^{-\left[\frac{x^2}{2\sigma^2 t} + \frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(1-t)}\right]}}{2\pi\sigma^2\sqrt{t(1-t)}}\ , \tag{19}$$

condizionando all'evento $\{\sigma B(1) \in dy\} = \left\{B\left(\sigma^2\right) \in dy\right\}$ che ha probabilità $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$, otteniamo

$$\mathbb{P}\left\{B\left(\sigma^2 t\right) \in dx, B\left(\sigma^2(1-t)\right) \in dy | B\left(\sigma^2\right) \in dy\right\} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{t(1-t)}} e^{-\left[\frac{x^2}{2\sigma^2 t} + \frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(1-t)}\right]}}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}} dx\ . \tag{20}$$

Per condizionare all'evento $\{X(1) = 0\}$ basta porre $y = 0$ nell'espressione precedente ottenendo

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t(1-t)}} \tag{21}$$

che è la densità di probabilità di $\sigma W(t)$ con $W(t)$ il ponte browniano tra 0 e 1. ■