Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2021/2022
07/07/2022

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 + \int_0^t ds s X(s) + \int_0^t s dB(s) \ , \\ dX(t) &= tX(t)\,dt + t dB(t) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

dove $(B(t)\ ,\ t \geq 0)$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la densità di probabilità della v.a.* $Y := e^{X(1,X_0)}$ *dove il processo stocastico* $(X(t, X_0)\ ,\ t \geq 0)$ *è dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô di cui al precedente punto 1.*

Soluzione:

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$Y(t) = f(t, X(t)) := X(t)\, e^{-\int_0^t dss} = X(t)\, e^{-\frac{s^2}{2}} \tag{2}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) = &\left\{(\partial_t f)(t, X(t)) + (\partial_x f)(t, X(t))\, tX(t) + \frac{1}{2}t^2 \left(\partial_x^2 f\right)(t, X(t))\right\} dt \\ &+ t(\partial_x f)(t, X(t))\, dB(t) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Ovvero, poiché $f(t, x) = xe^{-\frac{t^2}{2}}$, e

$$\partial_t f(t, x) = -tf(t, x) \ , \tag{4}$$

$$\partial_x f(t, x) = \frac{f(t, x)}{x} \ , \tag{5}$$

$$\partial_x^2 f(t, x) = 0 \ , \tag{6}$$

si ha

$$dY(t) = te^{-\frac{t^2}{2}} dB(t) \tag{7}$$

cioè, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + \int_0^t se^{-\frac{s^2}{2}} dB(s) \ , \tag{8}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= e^{\frac{t^2}{2}} Y(t, X_0) \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \left[X_0 + \int_0^t se^{-\frac{s^2}{2}} dB(s) \right] \ . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Ponendo $X_0 = 0$, si ha

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = e^{\frac{t^2}{2}} \mathbb{E}\left[\int_0^t se^{-\frac{s^2}{2}} dB(s) \right] = 0 \ . \tag{10}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &= \mathbb{E}[X(t, X_0) X(s, X_0)] \\ &= e^{\frac{1}{2}(t^2+s^2)} \int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^2 e^{-\tau^2} \ . \end{aligned} \tag{11}$$

3. la v.a.

$$X(1, X_0) = X(1, 0) = e^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}} dB(t) \right] \tag{12}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = 0 \tag{13}$$

e varianza

$$\sigma^2 := e^{-t^2} \int_0^1 dt t^2 e^{-t^2} \ . \tag{14}$$

Quindi, la v.a. $Y := e^{X(1,0)}$ ha distribuzione log-normale, ovvero $\forall y > 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{X(1, 0) \leq \log y\} \\ &= \int_{-\infty}^{\log y} dx \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \ ; \end{aligned} \tag{15}$$

pertanto,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{e^{-\frac{(\log y)^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{y} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) \ . \tag{16}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ *la successione di vv.aa. sullo spazio di probabilità filtrato* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, *tali che* $\forall n \geq 0$,

$$Y_n := \frac{f_1(X_0)\cdots f_1(X_n)}{f_0(X_0)\cdots f_0(X_n)} \ ,$$

dove $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *è una successione di vv.aa. i.i.d. su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *tale che* $f_0 > 0$ *è la densità di probabilità di* X_1 *e* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ *è la filtrazione naturale generata dalla successione* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *e* f_1 *è una densità di probabilità. Dimostrare che* $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ *è una martingala e discuterne la convergenza.*

Soluzione: Per definizione $\forall n \geq 0$, si ha $Y_{n+1} = Y_n \frac{f_1(X_{n+1})}{f_0(X_n)}$. Perciò, poiché f_1 è una densità di probabilità e le vv.aa. X_n sono i.i.d. con densità di probabilità f_0,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= Y_n \mathbb{E}\left[\frac{f_1(X_{n+1})}{f_0(X_n)}\right] = Y_n \int_{\mathbb{R}} dx f_0(x) \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \\
&= Y_n \int_{\mathbb{R}} dx f_1(x) = Y_n \ .
\end{aligned}$$

Inoltre i termini della successione $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ sono positivi, dunque $\forall n \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[|Y_n|\right] = \mathbb{E}\left[Y_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}\right]\right] = \mathbb{E}\left[Y_{n-1}\right] \ ; \tag{17}$$

iterando si ha

$$\mathbb{E}\left[|Y_n|\right] = \mathbb{E}\left[Y_0\right] = \int_{\mathbb{R}} dx f_0(x) \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = 1 \ , \tag{18}$$

perciò $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ è una L^1-martingala quindi convergente $\mathbb{P} - q.c.$ ad una v.a. $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (si veda anche il Corollario 196 degli appunti ultima versione). ∎