

Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2016/2017
07/11/2017

Esercizio 1 Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 + \int_0^t ds [e^{-s} X(s) + s^2] + \int_0^t s dB(s) , \\ dX(t) &= [e^{-t} X(t) + t^2] dt + t dB(t) . \end{aligned} \quad (1)$$

dove $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ è il moto browniano.

1. Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale $X_0 = 0$.
2. Calcolare la funzione di covarianza di $(X(t), t \geq 0)$.
3. Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio $(X(2, X_0), X(1, X_0))$ dove il processo stocastico $(X(t, X_0), t \geq 0)$ è dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô di cui al precedente punto 1.

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$Y(t) = f(t, X(t)) := X(t) e^{-\int_0^t ds e^{-s}} \quad (2)$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= \left\{ (\partial_t f)(t, X(t)) + (\partial_x f)(t, X(t)) [e^{-t} X(t) + t^2] + \frac{1}{2} t^2 (\partial_x^2 f)(t, X(t)) \right\} dt \\ &+ t (\partial_x f)(t, X(t)) dB(t) . \end{aligned} \quad (3)$$

Ovvero, poiché $f(t, x) = x e^{-\int_0^t ds e^{-s}}$, e

$$\partial_t f(t, x) = -e^{-t} f(t, x) , \quad (4)$$

$$\partial_x f(t, x) = \frac{f(t, x)}{x} , \quad (5)$$

$$\partial_x^2 f(t, x) = 0 , \quad (6)$$

si ha

$$dY(t) = t^2 e^{-\int_0^t ds e^{-s}} dt + t e^{-\int_0^t ds e^{-s}} dB(t) \quad (7)$$

cioè, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + \int_0^t s^2 e^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}} ds + \int_0^t s e^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}} dB(s), \quad (8)$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= e^{\int_0^t ds e^{-s}} Y(t, X_0) \\ &= e^{\int_0^t ds e^{-s}} \left[X_0 + \int_0^t s^2 e^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}} ds + \int_0^t s e^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}} dB(s) \right] \\ &= e^{(1-e^{-t})} \left[X_0 + \int_0^t s^2 e^{(e^{-s}-1)} ds + \int_0^t s e^{(e^{-s}-1)} dB(s) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

2. Ponendo $X_0 = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t, X_0)] &= e^{(1-e^{-t})} \left\{ \int_0^t s^2 e^{(e^{-s}-1)} ds + \mathbb{E} \left[\int_0^t s e^{(e^{-s}-1)} dB(s) \right] \right\} = \\ &= e^{(1-e^{-t})} \int_0^t s^2 e^{(e^{-s}-1)} ds = e^{-e^{-t}} \int_0^t s^2 e^{e^{-s}} ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &= \mathbb{E}[(X(t, X_0) - \mathbb{E}[X(t, X_0)])(X(s, X_0) - \mathbb{E}[X(s, X_0)])] \\ &= e^{(1-e^{-t})} e^{(1-e^{-s})} \int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^2 e^{2(e^{-\tau}-1)} \\ &= e^{-(e^{-t}+e^{-s})} \int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^2 e^{2e^{-\tau}}. \end{aligned} \quad (11)$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y &: = (X(2, X_0), X(1, X_0)) = (X(2, 0), X(1, 0)) \\ &= \left(e^{-e^{-2}} \left[\int_0^2 t^2 e^{e^{-t}} dt + \int_0^2 t e^{e^{-t}} dB(t) \right], \right. \\ &\quad \left. e^{-e^{-1}} \left[\int_0^1 t^2 e^{e^{-t}} dt + \int_0^1 t e^{e^{-t}} dB(t) \right] \right) \end{aligned} \quad (12)$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(e^{-e^{-2}} \int_0^2 t^2 e^{e^{-t}} dt, e^{-e^{-1}} \int_0^1 t^2 e^{e^{-t}} dt \right) = (\mu_1, \mu_2) \quad (13)$$

e matrice di varianza-covarianza

$$C \quad : \quad = \begin{pmatrix} e^{-2e^{-2}} \int_0^2 dt t^2 e^{2e^{-t}} & e^{-(e^{-2}+e^{-1})} \int_0^1 dt t^2 e^{2e^{-t}} \\ e^{-(e^{-2}+e^{-1})} \int_0^1 dt t^2 e^{2e^{-t}} & e^{-2e^{-1}} \int_0^1 dt t^2 e^{2e^{-t}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad : \quad &= \mathbb{E} \left[e^{i\langle \lambda, Y \rangle} \right] = e^{i\langle \lambda, \mu \rangle - \frac{1}{2} \langle C \lambda, \lambda \rangle} \\ &= e^{i(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)} \exp \left[-\frac{1}{2} (a \lambda_1^2 + 2b \lambda_1 \lambda_2 + c \lambda_2^2) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

■