Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2018/2019
11/09/2019

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds\,[cX(s) + \sigma s] + \int_0^t [\sigma X(s) + s]\,dB(s) \ , \tag{1}$$
$$dX(t) = [cX(t) + \sigma t]\,dt + [\sigma X(t) + t]\,dB(t) \ .$$

dove $(B(t) \ , \ t \geq 0)$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t) \ , \ t \geq 0)$ *per* $\sigma = 0$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(X(2, X_0), X(1, X_0))$ *dove il processo stocastico* $(X(t, X_0) \ , \ t \geq 0)$ *è dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô di cui al precedente punto 2.*

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EQS di Itô lineare il cui integrale generale è

$$\begin{aligned}
X(t, X_0) &= X_0 e^{\int_0^t ds\left[c-\frac{1}{2}\sigma^2\right]+\int_0^t \sigma dB(s)} + \\
&+ \int_0^t (\sigma s - s\sigma)\, e^{\int_s^t d\tau\left[c-\frac{1}{2}\sigma^2\right]+\int_s^t \sigma dB(\tau)} d\tau + \\
&+ \int_0^t s e^{\int_s^t d\tau\left[c-\frac{1}{2}\sigma^2\right]+\int_s^t \sigma dB(\tau)} dB(s) \\
&= X_0 e^{\int_0^t ds\left[c-\frac{1}{2}\sigma^2\right]+\int_0^t \sigma dB(s)} + \\
&+ \int_0^t s e^{\int_s^t d\tau\left[c-\frac{1}{2}\sigma^2\right]+\int_s^t \sigma dB(\tau)} dB(s) \ ,
\end{aligned}$$

che per $X_0 = 0$ risulta

$$X(t) = \int_0^t s e^{\left[c-\frac{1}{2}\sigma^2\right](t-s)+\sigma(B(t)-B(s))} dB(s) \ .$$

2. Ponendo $\sigma = 0$, si ha

$$X(t) = \int_0^t s e^{c(t-s)} dB(s) \ ,$$

pertanto,

$$\mathbb{E}[X(t)] = e^{ct}\mathbb{E}\left[\int_0^t s e^{-cs} dB(s)\right] = 0 \ . \tag{2}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov[X(t,X_0), X(s,X_0)] &= \mathbb{E}[X(t,X_0) X(s,X_0)] \\ &= e^{c(t+s)} \int_0^{t\wedge s} d\tau \tau^2 e^{-2c\tau} \ . \end{aligned} \tag{3}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y \ &: = (X(2,X_0), X(1,X_0)) = (X(2,0), X(1,0)) \\ &= \left(e^{2c}\left[\int_0^2 t e^{-ct} dB(t)\right], e^{c}\left[\int_0^1 t e^{-ct} dB(t)\right]\right) \end{aligned} \tag{4}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = (0,0) \tag{5}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$\begin{aligned} C \ &: = \begin{pmatrix} Cov[X(2,0), X(2,0)] & Cov[X(2,0), X(1,0)] \\ Cov[X(2,0), X(1,0)] & Cov[X(1,0), X(1,0)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \ &: = \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, Y\rangle}\right] = e^{i\langle \lambda, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda, \lambda\rangle} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{7}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo stocastico* $(X(t) \ , \ t \geq 0)$ *tale che* $\forall t \geq 0$,

$$X(t) := \log\left[1 + \frac{t^2}{2} B(t) - \int_0^t ds s B(s)\right] \ ,$$

dove $(B(t) \ , \ t \geq 0)$ *è il moto browniano. Calcolare il differenziale di Itô di* $X(t)$.

Soluzione: Poniamo $X(t) = \log Y(t)$; allora $Y(t) := 1 + \frac{t^2}{2} B(t) - \int_0^t ds s B(s)$. Integrando per parti otteniamo $Y(t) = 1 + \int_0^t \frac{s^2}{2} dB(s)$, dunque $dY(t) = \frac{t^2}{2} dB(t)$. Calcolando il fifferenziale di Itô di $X(t) = f(t,x) = \log x$ per $x = Y(t)$ otteniamo

$$\partial_t f = 0 \ , \ \partial_x f = \frac{1}{x} \ , \ \partial_x^2 f = -\frac{1}{x^2} \ ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} dX(t) &= \frac{\frac{t^2}{2} dB(t)}{Y(t)} - \frac{1}{2} \frac{1}{Y^2(t)} \frac{t^4}{4} dt \qquad (8) \\ &= -\frac{t^4}{8 \left(1 + \int_0^t \frac{s^2}{2} dB(s)\right)^2} dt + \frac{\frac{t^2}{2}}{1 + \int_0^t \frac{s^2}{2} dB(s)} dB(t) \ . \end{aligned}$$

■