Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2011/2012
12/07/2012

Esercizio 1 *Supponiamo di avere una catena di Markov con cinque stati,*

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Dallo stato 1 *si passa, con probabilità* $\frac{1}{3}$, *negli stati* $1, 2, 5$. *Dallo stato* 2, *con probabilità* $\frac{1}{3}$, *negli stati* $1, 2, 3$. *Dallo stato* 3, *con probabilità* $\frac{1}{3}$, *negli stati* $2, 4, 5$. *Dallo stato* 4, *con probabilità* $\frac{1}{3}$, *negli stati* $3, 4, 5$. *Dallo stato* 5, *con probabilità* $\frac{1}{3}$, *negli stati* $1, 3, 4$.

1. *Si scriva la matrice di transizione e si trovi(no) la(le?) probabilità invariante(i?).*

2. *Gli stati sono tutti ricorrenti?*

3. *Ci sono stati assorbenti?*

Soluzione:

1. La matrice di transizione risulta

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Il grafo associato alla matrice di transizione risulta

$$\begin{array}{ccccc} \overset{\curvearrowleft}{1} & \leftrightarrows & \overset{\curvearrowleft}{2} & \leftrightarrows & 3 \\ & \searrow\nwarrow & & \swarrow\nearrow & \uparrow\downarrow \\ & & 5 & \leftrightarrows & \underset{\circlearrowright}{4} \end{array}.$$

Quindi, nessuno stato è transitorio e non ci sono stati assorbenti.

2. Al fine di determinare le distribuzioni invarianti per la catena è necessario risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} uP = u \\ \sum_{i=1}^{5} u_i = 1 \end{cases} \quad , \ u \in \mathbb{R}^5,$$

ovvero

$$\begin{cases} \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_5 = u_1 \\ \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 = u_2 \\ \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_4 + \frac{1}{3}u_5 = u_3 \\ \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4 + \frac{1}{3}u_5 = u_4 \\ \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_4 + \frac{1}{3}u_5 = u_5 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $u = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Quindi tutti gli stati sono ricorrenti (positivi).

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds e^{-s} X(s) + \int_0^t s dB(s) \ , \tag{1}$$
$$dX(t) = e^{-t} X(t)\, dt + t dB(t) \ .$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$.

Soluzione:

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo.

   Ponendo
$$Y(t) = f(t, X(t)) := e^{-\int_0^t ds e^{-s}} X(t) \tag{2}$$
   e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene
$$df(t, X(t)) = \left[(\partial_t f)(t, X(t)) + (\partial_x f)(t, X(t))\, e^{-t} X(t) + \frac{1}{2} t^2 \left(\partial_x^2 f\right)(t, X(t))\right] dt \tag{3}$$
$$+ t(\partial_x f)(t, X(t))\, dB(t) \ .$$

   Ovvero, poiché $f(t, x) = x e^{-\int_0^t ds e^{-s}}$, e
$$\partial_t f(t, x) = -e^{-t} f(t, x) \ , \tag{4}$$
$$\partial_x f(t, x) = \frac{f(t, x)}{x} \ , \tag{5}$$
$$\partial_x^2 f(t, x) = 0 \ , \tag{6}$$

si ha

$$dY(t) = te^{-\int_0^t ds e^{-s}} dB(t) \tag{7}$$

ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + \int_0^t s e^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}} dB(s) \ , \tag{8}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= e^{\int_0^t ds e^{-s}} Y(t, X_0) \\ &= e^{\int_0^t ds e^{-s}} \left[X_0 + \int_0^t s e^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}} dB(s) \right] \\ &= e^{\left(1-e^{-t}\right)} \left[X_0 + \int_0^t s e^{\left(e^{-s}-1\right)} dB(s) \right] \ . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Ponendo $X_0 = 0$, si ha

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = e^{\left(1-e^{-t}\right)} \mathbb{E} \int_0^t s e^{\left(e^{-s}-1\right)} dB(s) = 0 \ . \tag{10}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &= \mathbb{E}[X(t, X_0) X(s, X_0)] \\ &= e^{\left(2-e^{-t}-e^{-s}\right)} \int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^2 e^{2e^{-\tau}-2} \\ &= e^{-\left(e^{-t}+e^{-s}\right)} \int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^2 e^{2e^{-\tau}} \ . \end{aligned} \tag{11}$$

■