Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2021/2022
13/09/2022

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0},\mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{aligned} X(t,X_0) &= X_0+\int_0^t e^{-s^2}X(s)\,ds+\int_0^t \cos s dB(s) \ , \\ dX(t) &= e^{-t^2}X(t)\,dt+\cos t dB(t) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0=0$.
2. *Calcolare la funzione di distribuzione della v.a.* $X(t,X_0)$ *per* $t>0$ *fissato.*
3. *Calcolare la funzione caratteristica di* $X(1,0)$, *dove* $(X(t,X_0)\ ,t\geq0)$ *è la soluzione del problema precedente.*

Soluzione:

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$Y(t)=f(t,X(t)):=X(t)\exp\left\{-\int_0^t dse^{-s^2}\right\} \tag{2}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} df(t,X(t)) = &\left\{(\partial_t f)(t,X(t))+(\partial_x f)(t,X(s))\,e^{-t^2}X(t)+\frac{1}{2}\cos^2 t\left(\partial_x^2 f\right)(t,X(t))\right\}dt \\ &+\cos t\,(\partial_x f)(t,X(t))\,dB(t) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Ovvero, poiché $f(t,x)=x\exp\left\{-\int_0^t dse^{-s^2}\right\}$, e

$$\partial_t f(t,x) = -e^{-t^2}f(t,x) \ , \tag{4}$$

$$\partial_x f(t,x) = \frac{f(t,x)}{x} \ , \tag{5}$$

$$\partial_x^2 f(t,x) = 0 \ , \tag{6}$$

si ha

$$dY(t) = \exp\left\{-\int_0^t ds e^{-s^2}\right\}\cos t dB(t) \tag{7}$$

cioè, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^t ds e^{-s^2}\right\}\cos s dB(s) \ , \tag{8}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= \exp\left\{\int_0^t ds e^{-s^2}\right\} Y(t, X_0) \\ &= \exp\left\{\int_0^t ds e^{-s^2}\right\}\left[X_0 + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s d\tau e^{-\tau^2}\right\}\cos s dB(s)\right] \ . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Ponendo $X_0 = 0$, si ha

$$X(t, 0) = \int_0^t \exp\left\{\int_s^t d\tau e^{-\tau^2}\right\}\cos s dB(s) \tag{10}$$

che è una v.a. gaussiana di media

$$\mathbb{E}[X(t, 0)] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \exp\left\{\int_s^t d\tau e^{-\tau^2}\right\}\cos s dB(s)\right] = 0 \tag{11}$$

e varianza

$$\mathbb{E}\left[X^2(s, 0)\right] = \int_0^t ds \exp 2\left\{\int_s^t d\tau e^{-\tau^2}\right\}\cos^2 s \ . \tag{12}$$

3. la v.a.

$$X(1, 0) = \int_0^1 \exp\left\{\int_s^1 d\tau e^{-\tau^2}\right\}\cos s dB(s) \tag{13}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = 0 \tag{14}$$

e varianza

$$\sigma^2 := \int_0^1 ds \exp 2\left\{\int_s^1 d\tau e^{-\tau^2}\right\}\cos^2 s \ . \tag{15}$$

Quindi, la funzione caratteristica di $X(1, 0)$ è

$$\varphi_{X(1,0)} = e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \ . \tag{16}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* $\{X_k\}_{k\geq 0} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *una successione di vv.aa. tale che se* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ *è la filtrazione naturale generata da* $\{X_k\}_{k\geq 0}$, $\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k] = aX_k + (1-a)X_{k-1}$ *per ogni* $k \geq 0$ *dove* $a \in (0, 1)$. *Per quale valore* $b \in \mathbb{R}$ *la successione di vv.aa.* $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ *tale che* $\forall k \geq 1, Y_k = bX_k + X_{k-1}$ *è una martingala rispetto a* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$?

Soluzione: Per definizione $\forall n \geq 0$, si ha $Y_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Inoltre,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y_{k+1} | \mathcal{F}_k\right] &= b\mathbb{E}\left[X_{k+1} | \mathcal{F}_k\right] + X_k = b\left(aX_k + (1-a)X_{k-1}\right) + X_k \\ &= (ba+1)X_k + b(1-a)X_{k-1}\end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{cases} ba + 1 = b \\ b(1-a) = 1 \end{cases}$$

si ottiene che $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ se $b = \frac{1}{1-a}$. ■