Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2011/2012
26/07/2012

Esercizio 1 *Supponiamo di avere una catena di Markov con cinque stati,*

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}\,.$$

Dallo stato 1 *si passa, con probabilità* $\frac{1}{2}$, *negli stati* 2 *e* 4. *Dallo stato* 2, *con probabilità* $\frac{1}{2}$, *negli stati* 1 *e* 3. *Dallo stato* 3, *con probabilità* $\frac{1}{2}$, *negli stati* 2 *e* 4. *Dallo stato* 4, *con probabilità* $\frac{1}{3}$, *negli stati* $1, 3$ *e* 5. *Dallo stato* 5, *con probabilità* $\frac{1}{4}$, *negli stati* $1, 2, 3$ *e* 4.

1. *Si scriva la matrice di transizione e si trovi la(le?) probabilità invariante(i?).*
2. *Gli stati sono tutti ricorrenti?*
3. *Ci sono stati assorbenti?*

Soluzione:

1. La matrice di transizione risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Il grafo associato alla matrice di transizione risulta

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \leftrightarrows & & 2 \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ \uparrow\downarrow & & 5 & & \uparrow\downarrow \\ & \swarrow\nearrow & & \searrow & \\ 4 & & \leftrightarrows & & 3 \end{array}\,.$$

Quindi, nessuno stato è transitorio e non ci sono stati assorbenti.

2. Al fine di determinare le distribuzioni invarianti per la catena è necessario risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} uP = u \\ \sum_{i=1}^{5} u_i = 1 \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}^5,$$

ovvero

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{4}u_5 = u_1 \\ \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{4}u_5 = u_2 \\ \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{4}u_5 = u_3 \\ \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{4}u_5 = u_4 \\ \frac{1}{3}u_4 = u_5 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $u = \left(\frac{13}{54}, \frac{6}{27}, \frac{13}{54}, \frac{6}{27}, \frac{2}{27}\right)$.

Quindi tutti gli stati sono ricorrenti (positivi).

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds \frac{s^2}{2} X(s) + \int_0^t sX(s)\, dB(s) \ , \tag{1}$$

$$dX(t) = \frac{t^2}{2} X(t)\, dt + tX(t)\, dB(t) \ .$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 1$.
2. *Calcolare la varianza di* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$.

Soluzione: L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.

1. Ponendo

$$Y(t) = f(t, X(t)) := \log \frac{X(t)}{X_0} \tag{2}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t,x) = \log \frac{x}{X_0}$, e

$$\partial_t f(t,x) = 0 \ , \tag{3}$$

$$\partial_x f(t,x) = \frac{X_0}{x} \ , \tag{4}$$

$$\partial_x^2 f(t,x) = -\frac{X_0}{x^2} \ , \tag{5}$$

si ha

$$dY(t) = tdB(t) \ , \tag{6}$$

$$Y(t) = \int_0^t sdB(s) \ . \tag{7}$$

Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,

$$X(t, X_0) = X_0 e^{\int_0^t s dB(s)} \ . \tag{8}$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)] &= 1 + \mathbb{E}\int_0^t ds \frac{s^2}{2} X(s) + \mathbb{E}\int_0^t sX(s)\, dB(s) = \\ &= 1 + \mathbb{E}\int_0^t ds \frac{s^2}{2} \mathbb{E}[X(s)] \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Perciò $\mathbb{E}[X(t)]$ risolve il problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mu_X(t) = \frac{t^2}{2}\mu_X(t) \\ \mu_X(0) = 1 \end{cases} , \tag{10}$$

la cui soluzione è $\mu_X(t) = e^{\frac{t^3}{6}}$. Inoltre, ponendo $Y(t) := f(t, X(t)) = X^2(t)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$Y(t) = 1 + \int_0^t ds 2s^2 X^2(s) + \int_0^t 2sX^2(s)\, dB(s) \ . \tag{11}$$

Quindi, ponendo $q_X(t) := \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_X(t) = 2t^2 q_X(t) \\ q_X(0) = 1 \end{cases} \tag{12}$$

ovvero, $q_X(t) = e^{\frac{2}{3}t^3}$. La varianza di $X(t, X_0)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2(t, X_0)\right] - \mathbb{E}^2[X(t, X_0)] = q_X(t) - \mu_X^2(t) = e^{\frac{2}{3}t^3} - e^{\frac{t^3}{3}} \ . \tag{13}$$

■