Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2016/2017
18/09/2017

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{aligned} X(t,X_0) &= X_0+\int_0^t ds\left[e^{-s}X(s)+s\right]+\int_0^t sdB(s)\ , \\ dX(t) &= \left[e^{-t}X(t)+t\right]dt+tdB(t)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0=0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t)\ ,\ t\geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(X(2,X_0),X(1,X_0))$ *dove il processo stocastico* $(X(t,X_0)\ ,\ t\geq 0)$ *è dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô di cui al precedente punto 1.*

Soluzione:

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$Y(t)=f(t,X(t)):=e^{-\int_0^t dse^{-s}}X(t) \tag{2}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} df(t,X(t)) &= \left\{(\partial_t f)(t,X(t))+(\partial_x f)(t,X(t))\left[e^{-t}X(t)+t\right]+\frac{1}{2}t^2\left(\partial_x^2 f\right)(t,X(t))\right\}dt \\ &\quad +t(\partial_x f)(t,X(t))\,dB(t)\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Ovvero, poiché $f(t,x)=xe^{-\int_0^t dse^{-s}}$, e

$$\partial_t f(t,x)=-e^{-t}f(t,x)\ , \tag{4}$$

$$\partial_x f(t,x)=\frac{f(t,x)}{x}\ , \tag{5}$$

$$\partial_x^2 f(t,x)=0\ , \tag{6}$$

si ha

$$dY(t) = te^{-\int_0^t dse^{-s}}dt + te^{-\int_0^t dse^{-s}}dB(t) \tag{7}$$

ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + \int_0^t se^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}}ds + \int_0^t se^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}}dB(s) \ , \tag{8}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= e^{\int_0^t dse^{-s}}Y(t, X_0) \\ &= e^{\int_0^t dse^{-s}}\left[X_0 + \int_0^t se^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}}ds + \int_0^t se^{-\int_0^s d\tau e^{-\tau}}dB(s)\right] \\ &= e^{\left(1-e^{-t}\right)}\left[X_0 + \int_0^t se^{\left(e^{-s}-1\right)}ds + \int_0^t se^{\left(e^{-s}-1\right)}dB(s)\right] \ . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Ponendo $X_0 = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t, X_0)] &= e^{\left(1-e^{-t}\right)}\left\{\int_0^t se^{\left(e^{-s}-1\right)}ds + \mathbb{E}\left[\int_0^t se^{\left(e^{-s}-1\right)}dB(s)\right]\right\} = \\ &= e^{\left(1-e^{-t}\right)}\int_0^t se^{\left(e^{-s}-1\right)}ds = e^{-e^{-t}}\int_0^t se^{e^{-s}}ds \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &= \mathbb{E}[(X(t, X_0) - \mathbb{E}[X(t, X_0)])(X(s, X_0) - \mathbb{E}[X(s, X_0)])] \\ &= e^{\left(1-e^{-t}\right)}e^{\left(1-e^{-s}\right)}\int_0^{t\wedge s} d\tau\tau^2 e^{2\left(e^{-\tau}-1\right)} \\ &= e^{-\left(e^{-t}+e^{-s}\right)}\int_0^{t\wedge s} d\tau\tau^2 e^{2e^{-\tau}} \ . \end{aligned} \tag{11}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y &:= (X(2, X_0), X(1, X_0)) = (X(2,0), X(1,0)) \\ &= \left(e^{-e^{-2}}\left[\int_0^2 te^{e^{-t}}dt + \int_0^2 te^{e^{-t}}dB(t)\right],\right. \\ &\quad \left. e^{-e^{-1}}\left[\int_0^1 te^{e^{-t}}dt + \int_0^1 te^{e^{-t}}dB(t)\right]\right) \end{aligned} \tag{12}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(e^{-e^{-2}}\int_0^2 te^{e^{-t}}dt, e^{-e^{-1}}\int_0^1 te^{e^{-t}}dt\right) = (\mu_1, \mu_2) \tag{13}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$\begin{aligned} C \quad : \quad &= \begin{pmatrix} e^{-2e^{-2}} \int_0^2 dt t^2 e^{2e^{-t}} & e^{-\left(e^{-2}+e^{-1}\right)} \int_0^1 dt t^2 e^{2e^{-t}} \\ e^{-\left(e^{-2}+e^{-1}\right)} \int_0^1 dt t^2 e^{2e^{-t}} & e^{-2e^{-1}} \int_0^1 dt t^2 e^{2e^{-t}} \end{pmatrix} && (14) \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} . && (15) \end{aligned}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad : \quad &= \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, Y \rangle}\right] = e^{i\langle \lambda, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda, \lambda \rangle} && (16) \\ &= e^{i(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2\right)\right] \end{aligned}$$

■