Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2016/2017
19/07/2017

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds \frac{s}{2} X(s) + \int_0^t \sqrt{s} X(s) \, dB(s) \ \ , \ , \tag{1}$$

$$dX(t) = \frac{t}{2} X(t) \, dt + \sqrt{t} X(t) \, dB(t) \ \ .$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 1$.
2. *Calcolare la varianza di* $(X(t, X_0) \ , \ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(X(2, X_0), X(1, X_0))$.

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.
   Ponendo
   $$Y(t) = f(t, X(t)) := \log \frac{X(t)}{X_0} \tag{2}$$
   e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t, x) = \log \frac{x}{X_0}$, e
   $$\partial_t f(t, x) = 0 \ , \tag{3}$$
   $$\partial_x f(t, x) = \frac{X_0}{x} \ , \tag{4}$$
   $$\partial_x^2 f(t, x) = -\frac{X_0}{x^2} \ , \tag{5}$$
   si ha
   $$dY(t) = \sqrt{t} dB(t) \ , \ Y(t) = \int_0^t \sqrt{s} dB(s) \ \ . \tag{6}$$
   Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,
   $$X(t, X_0) = X_0 e^{\int_0^t \sqrt{s} dB(s)} \ . \tag{7}$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\mathbb{E}\left[X\left(t,X_0\right)\right] = 1 + \mathbb{E}\left[\int_0^t ds \frac{s}{2} X\left(s\right)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \sqrt{s} X\left(s\right) dB\left(s\right)\right] \ , \tag{8}$$

ovvero, ponendo $\mu_X\left(t\right) := \mathbb{E}\left[X\left(t,X_0\right)\right]$, questo soddisfa il problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mu_X\left(t\right) = \frac{t}{2}\mu_X\left(t\right) \\ \mu_X\left(0\right) = 1 \end{cases} \ ; \tag{9}$$

dunque

$$\mu_X\left(t\right) = e^{\int_0^t ds \frac{s}{2}} = e^{\frac{t^2}{4}} \ . \tag{10}$$

Inoltre, ponendo $Y\left(t\right) := f\left(t, X\left(t\right)\right) = X^2\left(t\right)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$Y\left(t\right) = 1 + 2\int_0^t ds s X^2\left(s\right) + \int_0^t 2X^2\left(s\right)\sqrt{s} dB\left(s\right) \ . \tag{11}$$

Quindi, ponendo $q_X\left(t\right) := \mathbb{E}\left[Y\left(t\right)\right] = \mathbb{E}\left[X^2\left(t\right)\right]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_X\left(t\right) = 2t q_X\left(t\right) \\ q_X\left(0\right) = 1 \end{cases} \tag{12}$$

ovvero,

$$q_X\left(t\right) = e^{t^2} \ . \tag{13}$$

La varianza di $X\left(t,X_0\right)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2\left(t,X_0\right)\right] - \mathbb{E}^2\left[X\left(t,X_0\right)\right] = q_X\left(t\right) - \mu_X^2\left(t\right) = e^{t^2} - e^{\frac{t^2}{2}} \ . \tag{14}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y \ &: = \left(\log X\left(2,X_0\right), \log X\left(1,X_0\right)\right) \qquad (15) \\ &= \left(\int_0^2 \sqrt{t} dB\left(t\right), \int_0^1 \sqrt{t} dB\left(t\right)\right) \end{aligned}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(0,0\right) \tag{16}$$

e, poiché

$$a\left(t\right) := \int_0^t ds s = \frac{t^2}{2} \ , \tag{17}$$

matrice di varianza-covarianza

$$C := \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ . \tag{18}$$

Quindi, $\forall \lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2\right) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y\left(\lambda\right) \ &: = \mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda, Y\rangle}\right] = e^{-\frac{1}{2}\langle C\lambda,\lambda\rangle} \qquad (19) \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(2\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2\right)\right] \ . \end{aligned}$$

■