Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2020/2021
20/09/2021

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0},\mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t,X_0)=X_0+\int_0^t ds\,[X(s)+s]+\int_0^t[2\sigma X(s)+s]\,dB(s)\ , \tag{1}$$
$$dX(t)=[X(t)+t]\,dt+[2\sigma X(t)+t]\,dB(t)\ .$$

dove $(B(t)\ ,\ t\geq0)$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0=0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t)\ ,\ t\geq0)$ *per* $\sigma=0$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(X(2,X_0),X(1,X_0))$ *dove il processo stocastico* $(X(t,X_0)\ ,\ t\geq0)$ *è dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô di cui al precedente punto 2.*

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EQS di Itô lineare il cui integrale generale è

$$\begin{aligned}X(t,X_0)=&X_0e^{\int_0^t ds\left[1-2\sigma^2\right]+\int_0^t2\sigma dB(s)}+\\&+\int_0^t s(1-2\sigma)\,e^{\int_s^t d\tau\left[1-2\sigma^2\right]+\int_s^t2\sigma dB(\tau)}ds+\\&+\int_0^t se^{\int_s^t d\tau\left[1-2\sigma^2\right]+\int_s^t2\sigma dB(\tau)}dB(s)\ ,\end{aligned}$$

che per $X_0=0$ risulta

$$\begin{aligned}X(t)\ =\ &\int_0^t s(1-2\sigma)\,e^{\left[1-2\sigma^2\right](t-s)+2\sigma(B(t)-B(s))}ds+\\&+\int_0^t se^{\left[1-2\sigma^2\right](t-s)+2\sigma(B(t)-B(s))}dB(s)\ .\end{aligned}$$

2. Ponendo $\sigma = 0$, si ha

$$X(t) = \int_0^t se^{(t-s)} ds + \int_0^t se^{(t-s)} dB(s) \ ,$$

pertanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \int_0^t se^{(t-s)} ds + e^t \mathbb{E}\left[\int_0^t se^{-s} dB(s)\right] \\ &= e^t \int_0^t se^{-s} ds = e^t - t - 1 \ .\end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &= \mathbb{E}[X(t, X_0) X(s, X_0)] \\ &= e^{(t+s)} \int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^2 e^{-2\tau} \ .\end{aligned}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned}Y \ &: = (X(2, X_0), X(1, X_0)) = (X(2,0), X(1,0)) \\ &= \left(\int_0^2 te^{1-t} dt + \int_0^2 te^{1-t} dB(t), \int_0^1 te^{1-t} dt + \int_0^1 te^{1-t} dB(t)\right)\end{aligned} \tag{2}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(e^2 - 3, e - 2\right) \tag{3}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$\begin{aligned}C \ &: = \begin{pmatrix} Cov[X(2,0), X(2,0)] & Cov[X(2,0), X(1,0)] \\ Cov[X(2,0), X(1,0)] & Cov[X(1,0), X(1,0)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} .\end{aligned} \tag{4}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\varphi_Y(\lambda) \ &: = \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, Y \rangle}\right] = e^{i\langle \lambda, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda, \lambda \rangle} \\ &= e^{i(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2\right)\right] \ .\end{aligned} \tag{5}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo stocastico* $(X(t) \ , \ t \geq 0)$ *tale che* $\forall t \geq 0$,

$$X(t) := \left[1 + \frac{t^2}{2} B(t) - \int_0^t ds s B(s)\right]^2 \ ,$$

dove $(B(t) \ , \ t \geq 0)$ *è il moto browniano. Calcolare il differenziale di Itô di* $X(t)$.

Soluzione: Poniamo $X(t) = Y^2(t)$; allora $Y(t) := 1 + \frac{t^2}{2} B(t) - \int_0^t ds s B(s)$. Integrando per parti otteniamo $Y(t) = 1 + \int_0^t \frac{s^2}{2} dB(s)$, dunque $dY(t) = \frac{t^2}{2} dB(t)$. Calcolando il differenziale di Itô di $X(t) = f(t,x) = x^2$ per $x = Y(t)$ otteniamo

$$\partial_t f = 0 \ , \ \partial_x f = 2x \ , \ \partial_x^2 f = 2 \ ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} dX(t) &= 2Y(t) \frac{t^2}{2} dB(t) + \frac{t^4}{4} dt \\ &= \frac{t^2}{4} dt + t^2 \left(1 + \int_0^t \frac{s^2}{2} dB(s)\right) dB(t) \ . \end{aligned} \tag{6}$$

■