Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2011/2012
21/02/2012

Esercizio 1 *Consideriamo la catena di Markov su* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *la cui matrice di transizione* P *è data da*

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. *Determinare gli stati transitori e quelli ricorrenti.*

2. *Determinare tutte le distribuzioni invarianti.*

Soluzione:

1. Il grafo associato alla matrice di transizione risulta

$$\begin{array}{ccccccc} & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft \\ & & 2 & & 5 \\ & \nearrow & \uparrow\downarrow & \searrow & \uparrow\downarrow \\ & & 3 & & 4 \\ 1 & \longrightarrow & \circlearrowright & & \circlearrowright \end{array}$$

   da cui segue che gli stati transitori sono 1,2,3 mentre gli stati 4 e 5 sono ricorrenti.

2. Al fine di determinare le distribuzioni invarianti per la catena è necessario risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} uP = u \\ \sum_{i=1}^{5} u_i = 1 \end{cases}, \; u \in \mathbb{R}^5,$$

   ovvero

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_3 = u_2 \\ \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_3 = u_3 \\ \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{4}u_4 + \frac{1}{2}u_5 = u_4 \\ \frac{3}{4}u_4 + \frac{1}{2}u_5 = u_5 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 1 \end{cases}$$

   la cui soluzione è $u = \left(0, 0, 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo*

$$[0,T] \times \Omega \ni (t,\omega) \longmapsto X(t,\omega) := \int_0^t ds e^{-s} B(s,\omega) \in C_{ad}\left([0,T], L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\right)$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Calcolare la funzione di covarianza di* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$.
2. *Determinare se o meno* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *è una martingala, una submartingala o una supermartingala rispetto a* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Soluzione:

1. Integrando per parti si ottiene

$$X(t) = \left[-e^{-s}B(s)\right]_0^t + \int_0^t e^{-s} dB(s) = -e^{-t}B(t) + \int_0^t e^{-s} dB(s) \quad (1)$$

da cui segue

$$\mathbb{E}[X(t)] = -e^{-t}\mathbb{E}[B(t)] + \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-s} dB(s)\right] = 0$$

poiché sia $\mathbb{E}[B(t)]$ che $\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-s} dB(s)\right]$ sono nulli. Dunque la funzione di covarianza di $X(t)$ coincide con

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)X(s)] &= \mathbb{E}\left[\left(-e^{-t}B(t) + \int_0^t e^{-u} dB(u)\right)\left(-e^{-s}B(s) + \int_0^s e^{-u} dB(u)\right)\right] \\
&= e^{-(t+s)}(t \wedge s) - e^{-s}\mathbb{E}\left[B(s)\int_0^t e^{-u} dB(u)\right] \\
&\quad - e^{-t}\mathbb{E}\left[B(t)\int_0^s e^{-u} dB(u)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-u} dB(u)\int_0^s e^{-u} dB(u)\right],
\end{aligned}$$

ma

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t e^{-u} dB(u)\right)\left(\int_0^s e^{-u} dB(u)\right)\right] = \int_0^{t\wedge s} du e^{-2u} = \frac{\left(1 - e^{-2(t\wedge s)}\right)}{2}$$

e, usando la definizione di integrale di Itô,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[B(s)\int_0^t e^{-u} dB(u)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left[B(s\wedge t) + (B(s) - B(s\wedge t))\right]\left[\int_0^{t\wedge s} e^{-u} dB(u) + \int_{t\wedge s}^t e^{-u} dB(u)\right]\right] \\
&= \int_0^{t\wedge s} du e^{-u} = 1 - e^{-t\wedge s}.
\end{aligned}$$

Perciò, anche

$$\mathbb{E}\left[B(t)\int_0^s e^{-u}dB(u)\right] = 1 - e^{-t\wedge s} \ .$$

e

$$\mathbb{E}\left[X(t)\,X(s)\right] = e^{-(t+s)}\,(t\wedge s) - 2\left(1 - e^{-t\wedge s}\right) + \frac{\left(1 - e^{-2(t\wedge s)}\right)}{2} \ .$$

2. Sia $0 \leq s < t \leq T$. Allora, dalla (1), usando le proprietà di martingala del moto browniano e dell'integrale di Itô, segue

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(t)\,|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[-e^{-t}B(t) + \int_0^t e^{-u}dB(u)\,|\mathcal{F}_s\right] \\
&= -e^{-t}\mathbb{E}\left[B(t)\,|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-u}dB(u)\,|\mathcal{F}_s\right] \\
&= -e^{-t}B(s) + \int_0^s e^{-u}dB(u) \\
&= \left(e^{-s} - e^{-t}\right)B(s) + X(s) \ .
\end{aligned}$$

Quindi, certamente $X(t)$ non è una martingala. Inoltre, poiché se $s \in [0,t), (e^{-s} - e^{-t}) > 0$,

$$\begin{aligned}
&\left\{\omega \in \Omega : \left(e^{-s} - e^{-t}\right)B(s) \leq 0\right\} = \left\{\omega \in \Omega : B(s) \leq 0\right\} \\
&\quad = \left\{\omega \in \Omega : \sqrt{s}B(1) \leq 0\right\} = \left\{\omega \in \Omega : B(1) \leq 0\right\}
\end{aligned}$$

allora

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \left(e^{-s} - e^{-t}\right)B(s) \leq 0\right\} = \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \left(e^{-s} - e^{-t}\right)B(s) \geq 0\right\} = \frac{1}{2} \ ,$$

il che implica che $X(t)$ non è una submartingala né tantomeno una supermartingala.

■