Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2021/2022
22/07/2022

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t e^{-s^2} X(s)\, dB(s) \ , \tag{1}$$
$$dX(t) = e^{-t^2} X(t)\, dB(t) \ .$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 1$.
2. *Calcolare la varianza di* $(X(t, X_0) \ , \ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione di distribuzione (ripartizione) del vettore aleatorio* $(\log X(1, X_0), \log X(2, X_0))$.

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.
   Ponendo
   $$Y(t) = f(t, X(t)) := \log \frac{X(t)}{X_0} \tag{2}$$
   e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t, x) = \log \frac{x}{X_0}$, e
   $$\partial_t f(t, x) = 0 \ , \tag{3}$$
   $$\partial_x f(t, x) = \frac{X_0}{x} \ , \tag{4}$$
   $$\partial_x^2 f(t, x) = -\frac{X_0^2}{x^2} \ , \tag{5}$$
   si ha
   $$dY(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t^2} dt + e^{-t^2} dB(t) \ , \tag{6}$$
   $$Y(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t ds e^{-2s^2} + \int_0^t e^{-s^2} dB(s) \ . \tag{7}$$

Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,

$$X(t, X_0) = X_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^t ds e^{-2s^2} + \int_0^t e^{-s^2} dB(s)} \ . \tag{8}$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = 1 + \mathbb{E}\int_0^t e^{-s^2} X(s)\, dB(s) = 1 \ . \tag{9}$$

Inoltre, ponendo $Y(t) := f(t, X(t)) = X^2(t)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$Y(t) = 1 + \int_0^t ds e^{-2s^2} X^2(s) + \int_0^t 2X^2(s)\, e^{-s^2} dB(s) \ . \tag{10}$$

Quindi, ponendo $q_X(t) := \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_X(t) = e^{-2s^2} q_X(t) \\ q_X(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

ovvero,

$$q_X(t) = \exp\left[\int_0^t ds e^{-2s^2}\right] \ . \tag{12}$$

La varianza di $X(t, X_0)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2(t, X_0)\right] - \mathbb{E}^2[X(t, X_0)] = q_X(t) - 1 \ . \tag{13}$$

3. Per quanto riguarda il terzo punto, il vettore dei valori attesi del vettore aleatorio $(Y(1), Y(2)) = (\log X(1, X_0), \log X(2, X_0))$, per $X_0 = 1$, è

$$(\mu_1, \mu_2) = \left(-\frac{1}{2}\int_0^1 ds e^{-2s^2}, -\frac{1}{2}\int_0^2 ds e^{-2s^2}\right)$$

e la matrice di varianza-covarianza del processo $(Y(t) \ , \ t \geq 0)$ è

$$C = \begin{pmatrix} b & b \\ b & a \end{pmatrix} \ , \tag{14}$$

dove

$$a := \int_0^2 ds e^{-s^2} \ ; \ b := \int_0^1 ds e^{-s^2} \tag{15}$$

Quindi, la sua funzione di distribuzione ha densità

$$f_Y(x, y) := \frac{\exp\left\{-\frac{\left[b(x-\mu_1)^2 - 2b(x-2)(x-1) + a(x-\mu_2)^2\right]}{2b(a-b)}\right\}}{2\pi\sqrt{ab - b^2}} \ . \tag{16}$$

■

Esercizio 2 *Studiare la convergenza in distribuzione (legge) della successione di vv.aa.* $\{Y_n\}_{n\geq1}$ *su uno spazio di probabilità* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *dove* $\forall n\geq 1,$

$$Y_n := \frac{\sum_{i,j=1,..,n\ :\ i<j} X_i X_j}{\binom{n}{2}}$$

e $\{X_n\}_{n\geq1}$ *è una successione di vv.aa. i.i.d. tale che* $X_1 \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

Soluzione: Poiché $X_1 \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, per le proprietà della funzione caratteristica e per il fatto che le X_i sono vv.aa. i.i.d.,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{itY_n}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{\binom{n}{2}}\sum_{i,j=1,..,n\ :\ i<j} X_i X_j}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i+1}^{n} e^{i\frac{t}{\binom{n}{2}}X_iX_j}\right] = \\
&= \mathbb{E}^{\binom{n}{2}}\left[e^{i\frac{t}{\binom{n}{2}}X_1X_2}\right] = \\
&= \left(1+\frac{it}{\binom{n}{2}}\mathbb{E}\left[X_1X_2\right]+o\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)^{\binom{n}{2}} = \\
&= \left(1+\frac{it}{\binom{n}{2}}\mathbb{E}^2\left[X_1\right]+o\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)^{\binom{n}{2}} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{it\mathbb{E}^2[X_1]}\ .
\end{aligned}$$

■

Esercizio 3 *Sia* $\{X_k\}_{k\geq0}$ *una successione di vv.aa. definita sullo spazio di probabilità* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *tale che se* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq0}$ *è la filtrazione naturale generata da* $\{X_k\}_{k\geq0}$, $\mathbb{E}\left[f\left(X_{k+1}\right)|\mathcal{F}_k\right] = \int dx f(x)\, p(x|X_k)$ *per ogni* $k\geq 0$ *e* $f\in C_b(\mathbb{R})$. *Sia* φ *tale che* $\forall k\geq 0, \int dx\varphi(x)\, p(x|X_k) = \lambda\varphi(X_k)$ *con* $\varphi\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}), \lambda\neq 0$. *Costruire a partire da* φ *una successione* $\{Y_n\}_{n\geq0}$ *che sia una martingala rispetto alla filtrazione* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq0}$.

Soluzione: Ponendo $\forall n\geq 0, Y_n := \lambda^{-n}\varphi(X_n)$ si ha

$$\mathbb{E}\left[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = \lambda^{-n-1}\int dx\varphi(x)\, p(x|X_n) = \lambda^{-n}\varphi(X_n) = Y_n\ .$$

■