Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2021/2022
24/02/2022

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo stocastico* $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ *descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t) = \int_0^t a(s, X(s))\, ds + \int_0^t b(s, X(s))\, dB(s) \tag{1}$$

dove $(B(t)\ ,\ t \geq 0)$ *è il moto browniano.*

1. *Determinare le funzioni* a *e* b *percui il processo stocastico* $(Y(t)\ ,\ t \geq 0)$ *tale che per ogni* $t \geq 0, Y(t) = X^3(t)$ *è equivalente in distribuzione a* $(B(t)\ ,\ t \geq 0)$;

2. *Calcolare la funzione di distribuzione del vettore aleatorio* $(X(2), X(1))$ *dove* $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ *è il processo stocastico (1) con* $a(t, X(t)) = b(t, X(t)) = t$.

Soluzione:

1. Calcolando il differenziale di Itô di $Y(t) = f(t, x) = x^3$ per $x = X(t)$ otteniamo

$$\partial_t f = 0\ ,\ \partial_x f = 3x^2,\ \partial_x^2 f = 6x\ ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} dY(t) &= 3X(t)\left[X(t)\, a(t, X(t)) + b^2(t, X(t))\right] dt \\ &\quad +3X^2(t)\, b(t, X(t))\, dB(t)\ . \end{aligned}$$

Perciò dovendo essere $Y(t) \stackrel{b}{=} B(t)$ per ogni $t \geq 0$, dev'essere

$$\begin{cases} xa(t, x) + b^2(t, x) = 0 \\ 3x^2 b(t, x) = 1 \end{cases},$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} b(t, x) = \frac{1}{3x^2} \\ a(t, x) = -\frac{b^2(t,x)}{x} = -\frac{1}{9x^5} \end{cases}.$$

2. Ponendo

$$X(t) = \int_0^t sds + \int_0^t sdB(s) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t sdB(s)$$

si ha $\mathbb{E}[X(t)] = \frac{t^2}{2}$,

$$\begin{aligned} Cov[X(t), X(s)] &= \mathbb{E}[X(t) X(s)] \\ &= \int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^2 = \frac{(t \wedge s)^3}{3} \ . \end{aligned}$$

Pertanto il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} X \quad : &= (X(2), X(1)) = \\ &= \left(2 + \int_0^2 sdB(s), \frac{1}{2} + \int_0^1 sdB(s)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(2, \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$\begin{aligned} C \quad : &= \begin{pmatrix} Var[X(2)] & Cov[X(2), X(1)] \\ Cov[X(2), X(1)] & Var[X(1)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Quindi, la sua funzione di distribuzione ha densità

$$\begin{aligned} f_Y(x,y) \quad : &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{7}(x-2)^2 - \frac{6}{7}(x-2)(x-1) - \frac{24}{7}(x-1)^2\right]\right\}}{2\pi\sqrt{\det C}} \\ &= \frac{3}{2\pi\sqrt{7}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{7}(x-2)^2 - \frac{6}{7}(x-2)(x-1) - \frac{24}{7}(x-1)^2\right]\right\} \ . \end{aligned} \tag{5}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Risolvere l'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t) - 1 = \int_0^t \left(\frac{1}{X^2(s)} - \frac{1}{X^5(s)}\right) ds + \int_0^t \frac{1}{X^2(s)} dB(s) \tag{6}$$

dove $(B(t) \ , \ t \geq 0)$ *è il moto browniano.*

Soluzione: L'equazione 6 è della forma

$$X(t) - X_0 = \int_0^t \left[cf(X(s)) + \frac{1}{2} f(X(s)) \left(\frac{d}{dx} f\right)(X(s))\right] dt + \int_0^t f(X(s)) dB(s) \ , \tag{7}$$

quindi può essere risolta usando il calcolo di Stratonovich (cf. gli appunti sugli esercizi Esempio 3). La soluzione pertanto è

$$X(t) = \sqrt[3]{1 + 3(t + B(t))} \ . \tag{8}$$

■