Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2017/2018
25/07/2018

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t e^{-2s} X(s)\, dB(s) \ , \tag{1}$$
$$dX(t) = e^{-2t} X(t)\, dB(t) \ .$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 1$.
2. *Calcolare la varianza di* $(X(t, X_0)\ ,\ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(\log X(2, X_0), \log X(1, X_0))$.

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.
   Ponendo
   $$Y(t) = f(t, X(t)) := \log \frac{X(t)}{X_0} \tag{2}$$
   e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t,x) = \log \frac{x}{X_0}$, e
   $$\partial_t f(t,x) = 0 \ , \tag{3}$$
   $$\partial_x f(t,x) = \frac{X_0}{x} \ , \tag{4}$$
   $$\partial_x^2 f(t,x) = -\frac{X_0}{x^2} \ , \tag{5}$$
   si ha
   $$dY(t) = -\frac{1}{2} e^{-4t} dt + e^{-2t} dB(t) \ , \tag{6}$$
   $$\begin{aligned} Y(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t ds e^{-4s} + \int_0^t e^{-2s} dB(s) \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{-4t} - 1\right) + \int_0^t e^{-2s} dB(s) \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^t dse^{-4s} + \int_0^t e^{-2s} dB(s)} \\ &= X_0 e^{\frac{1}{8}\left(e^{-4t}-1\right) + \int_0^t e^{-2s} dB(s)} \ . \end{aligned} \tag{8}$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = 1 + \mathbb{E}\int_0^t e^{-2s} X(s)\, dB(s) = 1 \ . \tag{9}$$

Inoltre, ponendo $Y(t) := f(t, X(t)) = X^2(t)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$Y(t) = 1 + \int_0^t dse^{-4s} X^2(s) + \int_0^t 2X^2(s)\, e^{-2s} dB(s) \ . \tag{10}$$

Quindi, ponendo $q_X(t) := \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_X(t) = e^{-4s} q_X(t) \\ q_X(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

ovvero,

$$q_X(t) = e^{\frac{1}{4}\left(1-e^{-4t}\right)} \ . \tag{12}$$

La varianza di $X(t, X_0)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2(t, X_0)\right] - \mathbb{E}^2[X(t, X_0)] = q_X(t) - 1 = e^{\frac{1}{4}\left(1-e^{-4t}\right)} - 1 \ . \tag{13}$$

3. Dalla (7) si ottiene

$$\mathbb{E}[Y(t, X_0)] = -\frac{1}{8}\left(1 - e^{-4t}\right) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} Cov[Y(t, X_0), Y(s, X_0)] &= \mathbb{E}[(Y(t, X_0) - \mathbb{E}[Y(t, X_0)])(Y(s, X_0) - \mathbb{E}[Y(s, X_0)])] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge s} d\tau e^{-4\tau}\right] = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4(t\wedge s)}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y &:= (\log X(2, X_0), \log X(1, X_0)) \\ &= \left(-\frac{1}{8}\left(1 - e^{-8}\right) + \int_0^2 e^{-2t} dB(t), -\frac{1}{8}\left(1 - e^{-4}\right) + \int_0^1 e^{-2t} dB(t)\right) \end{aligned} \tag{16}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(-\frac{1}{8}\left(1 - e^{-8}\right), -\frac{1}{8}\left(1 - e^{-4}\right)\right) = (\mu_1, \mu_2) \tag{17}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(1-e^{-8}\right) & \frac{1}{4}\left(1-e^{-4}\right) \\ \frac{1}{4}\left(1-e^{-4}\right) & \frac{1}{4}\left(1-e^{-4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} . \tag{18}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad : &= \mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda, Y\rangle}\right] = e^{i\langle\lambda,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda,\lambda\rangle} \\ &= e^{i(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + b\lambda_2^2\right)\right] . \end{aligned} \tag{19}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo stocastico*

$$[0,T] \times \Omega \ni (t,\omega) \longmapsto X(t,\omega) := \int_0^t ds e^{-s} B(s,\omega) \in C_{ad}\left([0,T], L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\right)$$

dove $(B(t)\ ,\ t\geq 0)$ *è il moto browniano. Calcolare il differenziale di Itô di* $(X(t)\ ,\ t\geq 0)$ *e* $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s]$ *per* $s\in[0,t)$.

Soluzione: Poiché e^{-t} è una funzione differenziabile con derivata limitata in $[0,t]$ allora è possibile integrare per parti ottenendo

$$X(t) = \left[-e^{-s}B(s)\right]_0^t + \int_0^t e^{-s} dB(s) = -e^{-t}B(t) + \int_0^t e^{-s} dB(s)\ , \tag{20}$$

dove l'ultimo integrale e a destra esiste nel senso di Riemann-Stieltjes. Sia $(X_1(t)\ ,\ t\geq 0)$ il processo stocastico tale che $X_1(t) = f_1(t, B(t)) := \int_0^t e^{-s} dB(s)$. Allora $dX_1(t) = e^{-t} dB(t)$. Inoltre, ponendo $X_2(t) := f_2(t, B(t)) = -e^{-t}B(t)$ e facendone il differenziale di Itô otteniamo

$$\begin{aligned} dX_2(t) &= \left[\partial_t f_2(t,B(t)) + \frac{1}{2}\partial_x^2 f_2(t,B(t))\right] dt + \partial_x f_2(t,B(t))\, dB(t) \\ &= e^{-t}B(t)\, dt - e^{-t} dB(t) . \end{aligned} \tag{21}$$

Pertanto

$$dX(t) = dX_1(t) + dX_2(t) = e^{-t}B(t)\, dt \tag{22}$$

proprio come nel caso ordinario.

Inoltre,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[-e^{-t}B(t) + \int_0^t e^{-u} dB(u) |\mathcal{F}_s\right] \\ &= -e^{-t}\mathbb{E}[B(t)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-u} dB(u) |\mathcal{F}_s\right] \\ &= -e^{-t}B(s) + \int_0^s e^{-u} dB(u) \\ &= \left(e^{-s} - e^{-t}\right) B(s) + X(s) . \end{aligned} \tag{23}$$

■