# Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2018/2019
26/02/2019

**Esercizio 1** *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds\sqrt{s}X(s) + \int_0^t \sqrt{s}dB(s) \ , \tag{1}$$
$$dX(t) = \sqrt{t}X(t)\,dt + \sqrt{t}dB(t) \ .$$

*dove* $(B(t) \ , \ t \geq 0)$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t) \ , \ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(X(2, X_0), X(1, X_0))$ *dove il processo stocastico* $(X(t, X_0) \ , \ t \geq 0)$ *è dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô di cui al precedente punto 1.*

**Soluzione:**

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$Y(t) = f(t, X(t)) := X(t)\,e^{-\int_0^t ds\sqrt{s}} = X(t)\,e^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$df(t, X(t)) = \left\{(\partial_t f)(t, X(t)) + (\partial_x f)(t, X(t))\sqrt{t}X(t) + \frac{1}{2}t\left(\partial_x^2 f\right)(t, X(t))\right\} dt \tag{3}$$
$$+ \sqrt{t}\,(\partial_x f)(t, X(t))\,dB(t) \ .$$

Ovvero, poiché $f(t, x) = xe^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}$, e

$$\partial_t f(t, x) = -\sqrt{t}f(t, x) \ , \tag{4}$$
$$\partial_x f(t, x) = \frac{f(t, x)}{x} \ , \tag{5}$$
$$\partial_x^2 f(t, x) = 0 \ , \tag{6}$$

si ha

$$dY(t) = \sqrt{t}e^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}dB(t) \tag{7}$$

cioè, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + \int_0^t \sqrt{s}e^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}dB(s) \ , \tag{8}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}Y(t, X_0) \\ &= e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}\left[X_0 + \int_0^t \sqrt{s}e^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}dB(s)\right] \ . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Ponendo $X_0 = 0$, si ha

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}\mathbb{E}\left[\int_0^t \sqrt{s}e^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}dB(s)\right] = 0 \ . \tag{10}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &= \mathbb{E}[X(t, X_0)X(s, X_0)] \\ &= e^{\frac{2}{3}\left(t^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{3}{2}}\right)}\int_0^{t\wedge s} d\tau\tau e^{-\frac{4}{3}\tau^{\frac{3}{2}}} \ . \end{aligned} \tag{11}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y \ &: = (X(2, X_0), X(1, X_0)) = (X(2,0), X(1,0)) \\ &= \left(e^{-\frac{2\sqrt{8}}{3}}\left[\int_0^2 te^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}dB(t)\right], e^{-\frac{2}{3}}\left[\int_0^1 te^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}dB(t)\right]\right) \end{aligned} \tag{12}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = (0,0) \tag{13}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$\begin{aligned} C \ &: = \begin{pmatrix} Cov[X(2,0), X(2,0)] & Cov[X(2,0), X(1,0)] \\ Cov[X(2,0), X(1,0)] & Cov[X(1,0), X(1,0)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \ &: = \mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda, Y\rangle}\right] = e^{i\langle\lambda,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda,\lambda\rangle} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2\right)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

■

**Esercizio 2** *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo stocastico* $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ *tale che* $\forall t \geq 0$,

$$X(t) := \log\left[1 + \int_0^t ds e^{-B(s)}\right] + B(t)\ ,$$

*dove* $(B(t)\ ,\ t \geq 0)$ *è il moto browniano. Calcolare il differenziale di Itô di* $X(t)$ *ed identificare il termine martingala.*

**Soluzione:** Poniamo $X(t) = Y(t) + B(t)$; allora $Y(t) := f(t, B(t)) = \log\left[1 + \int_0^t ds e^{-B(s)}\right]$. Poiché $Y(0) = 0$, si ha

$$e^{Y(t)} - e^{Y(0)} = \int_0^t ds e^{-B(s)}\ , \tag{16}$$

ovvero il processo stocastico $\left(Z(t) := e^{Y(t)}\ ,\ t \geq 0\right)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} dZ(t) = dt e^{-B(t)} \\ Z(0) = 1 \end{cases} . \tag{17}$$

Ma il differenziale di Itô di $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ cioè $dX(t) = a(t, X(t))\, dt + b(t, X(t))\, dB(t)$ dev'essere

$$\begin{aligned} dY(t) + dB(t) &= a(t, Y(t) + B(t))\, dt + b(t, Y(t) + B(t))\, dB(t) \\ &= a(t, Y(t) + B(t))\, dt + dB(t)\ , \end{aligned} \tag{18}$$

ovvero

$$dY(t) = a(t, Y(t) + B(t))\, dt\ ; \tag{19}$$

da cui segue

$$e^{Y(t)} dY(t) = e^{Y(t)} a(t, Y(t) + B(t))\, dt\ , \tag{20}$$

cioè

$$dZ(t) = e^{Y(t)} a(t, Y(t) + B(t))\, dt = e^{-B(t)} dt\ . \tag{21}$$

Dunque

$$a(t, Y(t) + B(t)) = e^{-(Y(t)+B(t))} = e^{-X(t)} \tag{22}$$

e pertanto

$$dX(t) = e^{-X(t)} dt + dB(t)\ , \tag{23}$$

ovvero

$$X(t) = \int_0^t ds e^{-X(s)} + \int_0^t dB(s)\ ; \tag{24}$$

il che implica, come già appariva evidente dall'espressione esplicita di $X(t)$, che il termine di martingala nell'espressione del differenziale di Itô di $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ è $B(t) = \int_0^t dB(s)$. ■