Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2019/2020
26/02/2020

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds\,[X(s) + \sigma s] + \int_0^t [\sigma X(s) - s]\, dB(s) \ , \tag{1}$$
$$dX(t) = [cX(t) + \sigma t]\, dt + [\sigma X(t) - t]\, dB(t) \ .$$

dove $(B(t) \ , \ t \geq 0)$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t) \ , \ t \geq 0)$ *per* $\sigma = 0$.

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EQS di Itô lineare il cui integrale generale è

$$\begin{aligned} X(t, X_0) = {} & X_0 e^{\int_0^t ds\left[1-\frac{1}{2}\sigma^2\right]+\int_0^t \sigma dB(s)} + \\ & + \int_0^t 2\sigma s e^{\int_s^t d\tau\left[1-\frac{1}{2}\sigma^2\right]+\int_s^t \sigma dB(\tau)} d\tau + \\ & + \int_0^t -s e^{\int_s^t d\tau\left[1-\frac{1}{2}\sigma^2\right]+\int_s^t \sigma dB(\tau)} dB(s) \ , \end{aligned}$$

   che per $X_0 = 0$ risulta

$$\begin{aligned} X(t) \quad = \quad & + \int_0^t 2\sigma s e^{\int_s^t d\tau\left[1-\frac{1}{2}\sigma^2\right]+\int_s^t \sigma dB(\tau)} d\tau + \\ & - \int_0^t s e^{\left[1-\frac{1}{2}\sigma^2\right](t-s)+\sigma(B(t)-B(s))} dB(s) \ . \end{aligned}$$

2. Ponendo $\sigma = 0$, si ha

$$X(t) = -\int_0^t s e^{(t-s)} dB(s) \ ,$$

pertanto,

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=-e^{t}\mathbb{E}\left[\int_{0}^{t}se^{-s}dB\left(s\right)\right]=0\ . \tag{2}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov\left[X\left(t,X_{0}\right),X\left(s,X_{0}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[X\left(t,X_{0}\right)X\left(s,X_{0}\right)\right] \\ &= e^{(t+s)}\int_{0}^{t\wedge s}d\tau\tau^{2}e^{-2\tau}\ . \end{aligned} \tag{3}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega,\mathcal{F},\left\{\mathcal{F}_{t}\right\}_{t\geq0},\mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo aleatorio descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{cases} dX\left(t\right)=-\frac{X(t)}{1-t}dt+dB\left(t\right) \\ X\left(0\right)=0 \end{cases}\ ,\ t\in\left[0,1\right)\ , \tag{4}$$

dove $\left(B\left(t\right)\ ,\ t\geq0\right)$ *è il moto browniano.*

1. *Calcolare la funzione di distribuzione univariata di* $\left(X\left(t\right)\ ,\ t\in\left[0,1\right)\right);$
2. *Calcolare la funzione caratteristica della v.a.* $X\left(t\right)$ *dove il processo stocastico* $\left(X\left(s\right)\ ,\ s\in\left[0,1\right)\right).$

Soluzione:

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$Y\left(t\right)=f\left(t,X\left(t\right)\right):=X\left(t\right)e^{\int_{0}^{t}\frac{ds}{1-s}}=\frac{X\left(t\right)}{1-t} \tag{5}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y\left(t\right)$, si ottiene

$$\begin{aligned} df\left(t,X\left(t\right)\right)=&\left\{\left(\partial_{t}f\right)\left(t,X\left(t\right)\right)-\left(\partial_{x}f\right)\left(t,X\left(t\right)\right)\frac{X\left(t\right)}{1-t}+\frac{1}{2}t\left(\partial_{x}^{2}f\right)\left(t,X\left(t\right)\right)\right\}dt \\ &+\left(\partial_{x}f\right)\left(t,X\left(t\right)\right)dB\left(t\right)\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Ovvero, poiché $f\left(t,x\right)=\frac{x}{1-t}$, e

$$\partial_{t}f\left(t,x\right)=\frac{f\left(t,x\right)}{1-t}\ , \tag{7}$$

$$\partial_{x}f\left(t,x\right)=\frac{f\left(t,x\right)}{x}\ , \tag{8}$$

$$\partial_{x}^{2}f\left(t,x\right)=0\ , \tag{9}$$

si ha

$$dY\left(t\right)=\frac{dB\left(t\right)}{1-t} \tag{10}$$

cioè, tenendo conto che $Y\left(0,X\left(0\right)\right)=X_0$,

$$Y\left(t,X_0\right)=X_0+\int_0^t\frac{dB\left(s\right)}{1-s}\ , \tag{11}$$

dunque in definitiva, per $X_0=0$,

$$\begin{aligned} X\left(t\right)=X\left(t,0\right)&=\left(1-t\right)Y\left(t,0\right) \\ &=\left(1-t\right)\int_0^t\frac{dB\left(s\right)}{1-s}\ . \end{aligned} \tag{12}$$

Quindi $\left(X\left(t\right)\ ,\ t\in[0,1)\right)$ è gaussiano di valore atteso nullo e varianza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^2\left(t\right)\right] &= \left(1-t\right)^2\int_0^t ds\frac{1}{\left(1-s\right)^2}=\left(1-t\right)^2\left(\frac{1}{1-t}-1\right) && (13) \\ &= t\left(1-t\right)\ , && (14) \end{aligned}$$

2. La funzione caratteristica della v.a. $X\left(t\right)$ per $t\in\left(0,1\right)$ è

$$\varphi\left(\lambda\right)=\mathbb{E}\left[e^{i\lambda X(t)}\right]=e^{-\frac{\lambda^2}{2}t(1-t)}\ . \tag{15}$$

■