Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2011/2012
26/07/2012

Esercizio 1 *Si consideri la catena di Markov i cui stati sono* $1, 2, 3, 4$ *e* 5 *che sono, rispettivamente, i vertici di un quadrato ed il suo centro. I vertici sono collegati a quelli adiacenti ed al centro.*

Dai vertici $1, 2, 3$ *e* 4 *si passa agli adiacenti con probabilità* $\frac{1}{3}$*, mentre dallo stato* 5 *si va al vertice* i*,* $1 \leq i \leq 4$*, con probabilità* $\frac{i}{10}$*.*

1. *Si scriva la matrice di transizione e si trovi(no) la(le) probabilità invariante(i).*
2. *Gli stati sono tutti ricorrenti?*
3. *Ci sono stati assorbenti?*

Soluzione:

1. La matrice di transizione risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Il grafo associato alla matrice di transizione risulta

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \leftrightarrows & & 2 \\ & \searrow\nwarrow & & \swarrow\nearrow & \\ \uparrow\downarrow & & 5 & & \uparrow\downarrow \\ & \swarrow\nearrow & & \searrow\nwarrow & \\ 4 & & \leftrightarrows & & 3 \end{array}.$$

Quindi, nessuno stato è transitorio e non ci sono stati assorbenti.

2. Al fine di determinare le distribuzioni invarianti per la catena è necessario risolvere il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{c} uP = u \\ \sum_{i=1}^{5} u_i = 1 \end{array} \right. , \; u \in \mathbb{R}^5,$$

ovvero

$$\begin{cases} \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_4 + \frac{1}{10}u_5 = u_1 \\ \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{2}{10}u_5 = u_2 \\ \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_4 + \frac{3}{10}u_5 = u_3 \\ \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{4}{10}u_5 = u_4 \\ \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4 = u_5 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $u = \left(\frac{31}{200}, \frac{34}{200}, \frac{41}{200}, \frac{11}{50}, \frac{1}{4}\right)$.

Quindi tutti gli stati sono ricorrenti (positivi).

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t (\log s)\, X(s)\, dB(s) \ , \tag{1}$$

$$dX(t) = (\log t)\, X(t)\, dB(t) \ .$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 1$.
2. *Calcolare la varianza di* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$.

Soluzione: L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.

1. Ponendo

$$Y(t) = f(t, X(t)) := \log \frac{X(t)}{X_0} \tag{2}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t,x) = \log \frac{x}{X_0}$, e

$$\partial_t f(t,x) = 0 \ , \tag{3}$$

$$\partial_x f(t,x) = \frac{X_0}{x} \ , \tag{4}$$

$$\partial_x^2 f(t,x) = -\frac{X_0}{x^2} \ , \tag{5}$$

si ha

$$dY(t) = -\frac{1}{2}\log^2(t)\, dt + \log(t)\, dB(t) \ , \tag{6}$$

$$Y(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t ds \log^2(s) + \int_0^t \log(s)\, dB(s) \ . \tag{7}$$

Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,

$$X(t, X_0) = X_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^t ds \log^2(s) + \int_0^t \log(s) dB(s)} \tag{8}$$

$$= X_0 e^{-\frac{1}{2}t\left((\log t - 1)^2 + 1\right) + \int_0^t \log(s) dB(s)} \ .$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\mathbb{E}\left[X\left(t, X_0\right)\right] = 1 + \mathbb{E}\int_0^t \log\left(s\right) X\left(s\right) dB\left(s\right) = 1 \ . \tag{9}$$

Inoltre, ponendo $Y\left(t\right) := f\left(t, X\left(t\right)\right) = X^2\left(t\right)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$Y\left(t\right) = 1 + \int_0^t ds \log^2\left(s\right) X^2\left(s\right) + \int_0^t 2X^2\left(s\right) \log\left(s\right) dB\left(s\right) \ .$$

Quindi, ponendo $q_X\left(t\right) := \mathbb{E}\left[Y\left(t\right)\right] = \mathbb{E}\left[X^2\left(t\right)\right]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_X\left(t\right) = \log^2\left(t\right) q_X\left(t\right) \\ q_X\left(0\right) = 1 \end{cases} \tag{10}$$

ovvero,

$$q_X\left(t\right) = e^{t\left(\left(\log t - 1\right)^2 + 1\right)} \ . \tag{11}$$

La varianza di $X\left(t, X_0\right)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2\left(t, X_0\right)\right] - \mathbb{E}^2\left[X\left(t, X_0\right)\right] = q_X\left(t\right) - 1 = e^{t\left(\left(\log t - 1\right)^2 + 1\right)} - 1 \ . \tag{12}$$

■