# Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2017/2018
28/02/2018

**Esercizio 1** *Sia* $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t,X_0)=X_0+\int_0^t e^{-s}X(s)\,dB(s)\ , \tag{1}$$
$$dX(t)=e^{-t}X(t)\,dB(t)\ .$$

*dove* $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0=1$.
2. *Calcolare la varianza di* $(X(t,X_0)\ ,\ t\geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(\log X(2,X_0),\log X(1,X_0))$.

**Soluzione:**

1. L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.
   Ponendo
   $$Y(t)=f(t,X(t)):=\log\frac{X(t)}{X_0} \tag{2}$$
   e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t,x)=\log\frac{x}{X_0}$, e
   $$\partial_t f(t,x)=0\ , \tag{3}$$
   $$\partial_x f(t,x)=\frac{X_0}{x}\ , \tag{4}$$
   $$\partial_x^2 f(t,x)=-\frac{X_0}{x^2}\ , \tag{5}$$
   si ha
   $$dY(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}dt+e^{-t}dB(t)\ , \tag{6}$$
   $$Y(t)=-\frac{1}{2}\int_0^t ds e^{-2s}+\int_0^t e^{-s}dB(s)\ . \tag{7}$$

Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,

$$X(t, X_0) = X_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^t ds e^{-2s} + \int_0^t e^{-s} dB(s)} \tag{8}$$
$$= X_0 e^{-\frac{1}{4}\left(1-e^{-2t}\right) + \int_0^t e^{-s} dB(s)} \ .$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = 1 + \mathbb{E}\int_0^t e^{-s} X(s)\, dB(s) = 1 \ . \tag{9}$$

Inoltre, ponendo $Y(t) := f(t, X(t)) = X^2(t)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$Y(t) = 1 + \int_0^t ds e^{-2s} X^2(s) + \int_0^t 2X^2(s)\, e^{-s} dB(s) \ . \tag{10}$$

Quindi, ponendo $q_X(t) := \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a $t$ si ha che $q_X$ è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_X(t) = e^{-2s} q_X(t) \\ q_X(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

ovvero,

$$q_X(t) = e^{\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)} \ . \tag{12}$$

La varianza di $X(t, X_0)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2(t, X_0)\right] - \mathbb{E}^2[X(t, X_0)] = q_X(t) - 1 = e^{\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)} - 1 \ . \tag{13}$$

3. Dalla (7) si ottiene

$$\mathbb{E}[Y(t, X_0)] = -\frac{1}{4}\left(1 - e^{-2t}\right) \tag{14}$$
$$Cov[Y(t, X_0), Y(s, X_0)] = \mathbb{E}[(Y(t, X_0) - \mathbb{E}[Y(t, X_0)])(Y(s, X_0) - \mathbb{E}[Y(s, X_0)])] \tag{15}$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge s} d\tau e^{-2\tau}\right] = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2(t\wedge s)}\right)$$

Il vettore aleatorio

$$Y \ : \ = (\log X(2, X_0), \log X(1, X_0)) \tag{16}$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\left(1-e^{-4}\right) + \int_0^2 e^{-t} dB(t), -\frac{1}{4}\left(1-e^{-2}\right) + \int_0^1 e^{-t} dB(t)\right)$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(-\frac{1}{4}\left(1-e^{-4}\right), -\frac{1}{4}\left(1-e^{-2}\right)\right) = (\mu_1, \mu_2) \tag{17}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right) & \frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right) & \frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} . \tag{18}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad : \quad &= \mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda,Y\rangle}\right] = e^{i\langle\lambda,\mu\rangle-\frac{1}{2}\langle C\lambda,\lambda\rangle} \qquad (19) \\ &= e^{i(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(a\lambda_1^2+2b\lambda_1\lambda_2+b\lambda_2^2\right)\right] . \end{aligned}$$

■

**Esercizio 2** *Un urna contiene palline bianche e nere. Ogni volta che si estrae una pallina la si reimbussola insieme ad un'altra pallina dello stesso colore. Siano $N_n$ e $B_n$ rispettivamente il numero di palline nere e di palline bianche presenti nell'urna dopo l'ennesima estrazione. Supponendo che all'inizio l'urna contiene una pallina bianca e una nera, ovvero $N_0 = B_0 = 1$, dimostrare che la successione $\{X_n\}_{n\geq 0}$ tale che $X_n := \frac{N_n}{n+2}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale e studiarne la convergenza.*

**Soluzione:** Posto $P_n$ il numero totale di palline contenute nell'urna prima dell'$n$+1-sima estrazione, si ha

$$P_n = N_n + B_n = n + 2 . \tag{20}$$

Inoltre, poiché si tratta di campionamento con reimbussolamento, la probabilità di estrarre una pallina nera dall'urna all'ennesima estrazione è pari alla frazione di palline nere ivi contenute. Dunque, la probabilità che il numero di palline nere contenute nell'urna dopo l'ennesima estrazione sia aumentato di un unità è pari alla probabilità d'aver estratto una pallina nera all'ennesima estrazione, ovvero

$$\mathbb{P}\left[N_{n+1} = m+1 | N_n = m\right] = \frac{m}{n+2} , \tag{21}$$

perciò

$$\mathbb{P}\left[N_{n+1} = m | N_n = m\right] = 1 - \frac{m}{n+2} . \tag{22}$$

Indicando con $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ la filtrazione generata dalla successione di v.a. $\{X_n\}_{n\geq 0}$, ovvero tale che $\mathcal{F}_n := \sigma\{X_1, .., X_n\}$ e $\mathcal{F}_0$ è la $\sigma$algebra banale, poiché $\forall n \geq 1, \mathcal{F}_n = \sigma\{N_1, .., N_n\}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{N_{n+1}}{n+3}|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{N_{n+1}}{n+3}|R_n\right] \qquad (23) \\ &= \frac{N_n+1}{n+3}\frac{N_n}{n+2} + \frac{N_n}{n+3}\left(1-\frac{N_n}{n+2}\right) \\ &= \frac{N_n}{n+2} = X_n . \end{aligned}$$

Allora $\{X_n\}_{n\geq 0}$ è una martingala non negativa quindi, poiché $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = \frac{1}{2}$,

$$\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}\left[|X_n|\right] = \sup_{n\geq 0}\mathbb{E}\left[X_n\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] < \infty \tag{24}$$

è una $L^1$-martingala e perciò convergente $\mathbb{P}$-q.c. ad una v.a. non negativa $X$ tale che $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_0] = \frac{1}{2}$. Inoltre, siccome per definizione $B_n \geq B_0 = 1$, dalla (20) si ha che $N_n \leq n+1$, dunque

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[X_n^2\right] = \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[\frac{N_n^2}{(n+2)^2}\right] \leq \sup_{n\geq 0}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \leq 1 \ , \tag{25}$$

ovvero $\{X_n\}_{n\geq 0}$ è una $L^2$-martingala e pertanto è regolare. ■