Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2022/2023
29/03/2023

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$
\begin{aligned}
X(t,X_0) &= X_0+\int_0^t ds\left[-sX(s)+e^{-s}\right]+\int_0^t sdB(s)\ , \qquad (1)\\
dX(t) &= \left[-sX(t)+e^{-t}\right]dt+tdB(t)\ .
\end{aligned}
$$

dove $(B(t)\ ,\ t\geq 0)$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0=0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t)\ ,\ t\geq 0)$.
3. *Calcolare la distribuzione di probabilità del vettore aleatorio* $(X(2,X_0),X(1,X_0))$ *dove il processo stocastico* $(X(t,X_0)\ ,\ t\geq 0)$ *è dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô di cui al precedente punto 1.*

Soluzione:

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$
Y(t)=f(t,X(t)):=X(t)\,e^{\int_0^t dss}=X(t)\,e^{\frac{1}{2}t^2} \qquad (2)
$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
df(t,X(t)) = &\left\{(\partial_t f)(t,X(t))+(\partial_x f)(t,X(t))\left[-tX(t)+e^{-t}\right]+\frac{1}{2}t^2\left(\partial_x^2 f\right)(t,X(t))\right\}dt \\
&+t(\partial_x f)(t,X(t))\,dB(t)\ . \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Ovvero, poiché $f(t,x)=xe^{\frac{1}{2}t^2}$, e

$$
\begin{aligned}
\partial_t f(t,x) &= tf(t,x)\ , && (4)\\
\partial_x f(t,x) &= \frac{f(t,x)}{x}\ , && (5)\\
\partial_x^2 f(t,x) &= 0\ , && (6)
\end{aligned}
$$

si ha

$$dY(t) = e^{\frac{1}{2}t^2 - t}dt + te^{\frac{1}{2}t^2}dB(t) \tag{7}$$

cioè, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + \int_0^t e^{\frac{1}{2}s^2 - s}ds + \int_0^t se^{\frac{1}{2}s^2}dB(s) \ , \tag{8}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= e^{-\frac{1}{2}t^2}Y(t, X_0) \\ &= e^{-\frac{1}{2}t^2}\left[X_0 + \int_0^t e^{\frac{1}{2}s^2 - s}ds + \int_0^t se^{\frac{1}{2}s^2}dB(s)\right] \ . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Ponendo $X_0 = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t, X_0)] &= e^{-\frac{1}{2}t^2}\left\{\int_0^t e^{\frac{1}{2}s^2 2s}ds + \mathbb{E}\left[\int_0^t se^{\frac{1}{2}s^2}dB(s)\right]\right\} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}t^2}\int_0^t e^{\frac{1}{2}s^2 - s}ds \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &= \mathbb{E}[(X(t, X_0) - \mathbb{E}[X(t, X_0)])(X(s, X_0) - \mathbb{E}[X(s, X_0)])] \\ &= e^{-\frac{1}{2}(t^2 + s^2)}\int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^2 e^{\tau^2} \ . \end{aligned} \tag{11}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y \ &: \ = (X(2, X_0), X(1, X_0)) = (X(2, 0), X(1, 0)) \\ &= \left(e^{-2}\left[\int_0^2 e^{\frac{1}{2}t^2 - t}dt + \int_0^2 te^{\frac{1}{2}t^2}dB(t)\right],\right. \\ &\quad \left. e^{-\frac{1}{2}}\left[\int_0^1 e^{\frac{1}{2}t^2 - t}dt + \int_0^1 te^{\frac{1}{2}t^2}dB(t)\right]\right) \end{aligned} \tag{12}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(e^{-2}\int_0^2 e^{\frac{1}{2}t^2 - t}dt, e^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{\frac{1}{2}t^2 - t}dt\right) = (\mu_1, \mu_2) \tag{13}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$\begin{aligned} C \ &: \ = \begin{pmatrix} Cov[X(2, 0), X(2, 0)] & Cov[X(2, 0), X(1, 0)] \\ Cov[X(2, 0), X(1, 0)] & Cov[X(1, 0), X(1, 0)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Quindi, Y ha densità di probabilità

$$
\begin{aligned}
f_Y(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det C}} e^{-\frac{1}{2}\left\langle (x-\mu_1, y-\mu_2), C^{-1}(x-\mu_1, y-\mu_2)\right\rangle} \qquad (15)\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{ac-b^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ac-b^2}(x-\mu_1)^2 - 2\frac{b}{ac-b^2}(x-\mu_1)(y-\mu_2) + \frac{a}{ac-b^2}(y-\mu_2)^2\right)}
\end{aligned}
$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo stocastico* $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ *tale che* $\forall t \geq 0, X(t) := \left(B(t) + \sqrt{X_0}\right)^2$, *dove* $(B(t)\ ,\ t \geq 0)$ *è il moto browniano e* X_0 *è una v.a. positiva indipendente dalla filtrazione naturale di* $(B(t)\ ,\ t \geq 0)$. *Calcolare il differenziale di Itô di* $X(t)$, *il suo valore atteso e la sua varianza.*

Soluzione: Ponendo $X(t) = f(B(t))$ ed applicando il Lemma di Itô si ha $f'(x) = 2\left(x + \sqrt{X_0}\right) = 2\sqrt{f(x)}, f''(x) = 2$. Pertanto,

$$
df(B(t)) = \frac{1}{2} f''(B(t))\, dt + f'(B(t))\, dB(t)\ , \qquad (16)
$$

ovvero $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ verifica l'Equazione Differenziale Stocastica di Itô

$$
\begin{aligned}
X(t, X_0) &= X_0 + \int_0^t ds + \int_0^t 2\sqrt{X(s)}\, dB(s)\ , \qquad (17)\\
dX(t) &= dt + 2\sqrt{X(t)}\, dB(t)\ ,\ X(0) = X_0\ . \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = \mathbb{E}[X_0] + t$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X(t, X_0))^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(B(t) + \sqrt{X_0}\right)^4\right] \qquad (19)\\
&= \mathbb{E}\left[\left[\mathbb{E}\left(B(t) + \sqrt{X_0}\right)^4 \middle| X_0\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \left(x + \sqrt{X_0}\right)^4\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \left(x^4 + 6x^2 X_0 + X_0^2\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[3t^2 + 6tX_0 + X_0^2\right] = 3t^2 + 6t\mathbb{E}[X_0] + \mathbb{E}\left[X_0^2\right]\ .
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
Var[X(t, X_0)] = 2t^2 + 4t\mathbb{E}[X_0] + Var[X_0]\ . \qquad (20)
$$

■