Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2021/2022
30/03/2022

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 + \int_0^t e^{-s} X(s)\, dB(s) \ , \\ dX(t) &= e^{-t} X(t)\, dB(t) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 1$.
2. *Calcolare la varianza di* $(X(t, X_0) \ , \ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione di distribuzione (ripartizione) del vettore aleatorio* $(\log X(1, X_0), \log X(2, X_0))$.

Soluzione: Per i primi 2 punti si veda la soluzione del tema d'esame del 28/02/2018. Per quanto riguarda il terzo punto, il vettore dei valori attesi del vettore aleatorio $(Y(1), Y(2)) = (\log X(1, X_0), \log X(2, X_0))$, per $X_0 = 1$, è

$$(\mu_1, \mu_2) = \left(-\frac{1}{4}\left(1 - e^{-2}\right), -\frac{1}{4}\left(1 - e^{-4}\right)\right)$$

e la matrice di varianza-covarianza del processo $(Y(t) \ , \ t \geq 0)$ è

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right) & \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right) & \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b \\ b & a \end{pmatrix} \ . \tag{2}$$

Quindi, la sua funzione di distribuzione ha densità

$$f_Y(x, y) := \frac{\exp\left\{-\frac{\left[b(x-\mu_1)^2 - 2b(x-2)(x-1) + a(x-\mu_2)^2\right]}{2b(a-b)}\right\}}{2\pi\sqrt{ab - b^2}} \ . \tag{3}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\{X_k\}_{k\geq 1}$ *una successione di vv.aa. i.i.d. definita sullo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *tale che* $\exists \alpha > 0$ *per cui* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha |X_1|}\right] < \infty$ *e sia* F *la funzione di distribuzione (ripartizione) di* X_1.

1. *Dimostrare che esiste $\lambda \neq 0$ tale che la successione di vv.aa. $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ tale che $Y_0 = 1$ e $\forall n \geq 1, Y_n := \frac{\exp \lambda \sum_{k=1}^{n} X_k}{(\mathbb{E}[\exp \lambda X_1])^n}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale generata da $\{X_k\}_{k\geq 1}$.*

2. *Calcolare la funzione di distribuzione della v.a. Y_n di cui al punto 1, sapendo che $X_1 \stackrel{d}{=} Ber(p)$.*

Soluzione:

1. Dalla condizione $\mathbb{E}\left[e^{\alpha|X_1|}\right] < \infty$ segue che $\forall \lambda \in (-\alpha, \alpha)$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_1}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} dF(x) < \infty \ ,$$

allora $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ è la martingala di Wald (cf. Capitolo 3, Esempio2, n. 3 degli Appunti).

2. $Y_n > 0$, pertanto $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \leq 0\} = 0$. Inoltre, poiché $X_1 \stackrel{d}{=} Ber(p)$, allora $\sum_{k=1}^{n} X_k \stackrel{d}{=} Bin(n, p)$, da cui segue che $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \leq x\} &= \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \leq \frac{\log x\,(\mathbb{E}[\exp \lambda X_1])^n}{\lambda}\right\} \\
&= \sum_{0\leq k \leq \frac{\log x(\mathbb{E}[\exp \lambda X_1])^n}{\lambda} \wedge n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

■