DISPENSE TRaddenda

Tratte dall'elaborato finale per la Laurea in Matematica
"Aspetti della Dinamica nella Relatività Speciale"
di Rosita Nicotera

Capitolo 1

Dispensa TR1.C: Invarianti

1.1 Quadrivettori.

Si consideri un punto materiale P che si muove seguendo una linea di mondo $(t, \vec{x}(t))$, in maniera tale, cioè, che al tempo t la sua posizione spaziale sia $\vec{x}(t)$ rispetto a un sistema di riferimento Σ.

Per *evento* in Relatività Speciale s'intende un punto di R^4 individuato da una coordinata temporale t e da tre coordinate spaziali $(x, y, z) = \vec{x}$, inteso come il punto sede di una coincidenza spazio temporale tra le due linee di mondo. Pertando indicheremo la posizione spazio-temporale di un evento rispetto un sistema inerziale Σ con un vettore di R^4:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Questa rappresentazione, dove c è la velocità della luce nel vuoto, rende omogenee le dimensioni fisiche delle quattro componenti del vettore; in altre parole anche la componente temporale assume la dimensione di una lunghezza.

Sia Σ' un altro sistema inerziale con una velocità costante $\vec{v} = (v, 0, 0)$ rispetto a Σ, in maniera tale che all'istante $t = t' = 0$

1. le origini dei due sistemi coincidano
2. gli assi x dei due sistemi siano sovrapposti
3. l'asse y di Σ' giaccia nel piano xy di Σ.

Per conoscere la quaterna $\underline{x}'$ che rappresenta lo stesso evento rispetto a Σ' utilizziamo le relative trasformazioni di Lorentz che comportano una corrispondenza lineare L delle coordinate spazio-temporali.

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = L\underline{x}$$

Definizione 1.1

Si definisce quadrivettore una grandezza fisica vettoriale rappresentabile in R^4, tale che se $\underline{q}$ è il suo valore rispetto al sistema inerziale Σ, allora il suo valore $\underline{q}'$ rispetto al sistema Σ', legato a Σ dalla trasformazione di Lorents L, è dato da

$$\underline{q}' = L\underline{q}$$

Esempio 1.1

Dato un punto materiale che possieda velocità $\vec{u}$ all'istante t, definiamo:

$$\underline{q} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2(t)/c^2}} \cdot \begin{bmatrix} c \\ \vec{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_o \\ \vec{q} \end{bmatrix} \in R^4.$$

Il vettore quadridimensionale $\underline{q}$ rappresenta la *quadrivelocità* ottenuta derivando rispetto al tempo proprio la posizione spazio-temporale:

$$\underline{q}(t) = \frac{d}{d\tau}\underline{x}(t) = \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} ct \\ \vec{x}(t) \end{bmatrix},$$

e pertanto è un quadrivettore.

1.2 Concetto di invarianza.

Definizione 1.2

Uno scalare invariante è una grandezza fisica il cui valore è un numero che non dipende dal sistema di riferimento che si considera.

Ad esempio, se la grandezza è una funzione f della variabile evento $\underline{x}$, è invariante se e soltanto se:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}')$$

dove $\underline{x}' = L\underline{x}$.

Dato un vettore $\underline{w} = (w_0, \vec{w}) \in R^4$, introduciamo la funzione scalare

$$f : R^4 \to R^4.$$

definita da:

$$f(\underline{w}) = w_o^2 - ||\vec{w}||^2.$$

Vediamo nei seguenti esempi che questa funzione f permette di individuare diversi invarianti.

Esempio 1.2

Consideriamo la particella dell'esempio 1.1, con quadrivelocità $\underline{q}$. Abbiamo:

$$f(\underline{q}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot \begin{bmatrix} c \\ \vec{u}(t) \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{c^2}{1-u^2/c^2} - \frac{u_x^2}{1-u^2/c^2} - \frac{u_y^2}{1-u^2/c^2} - \frac{u_z^2}{1-u^2/c^2} =$$

(mettendo in evidenza il fattore comune $\frac{1}{1-u^2/c^2}$)

$$\begin{aligned} = \frac{1}{1-u^2/c^2} \cdot (c^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) \quad &= \quad \frac{1}{1-u^2/c^2} \cdot (c^2 - u^2) = \\ &= \quad \frac{c^2}{c^2-u^2} \cdot (c^2 - u^2) = c^2 \end{aligned}$$

Ciò che rimane è c^2, ossia il quadrato della velocità della luce.

Ora, se calcoliamo il valore di f in corrispondenza della quadrivelocità rispetto al sistema Σ' in moto con una velocità costante $\vec{u}$ rispetto a Σ, gli stessi calcoli porteranno ovviamente a

$$f(\underline{q}') = c^2.$$

Quindi $f(\underline{q})$ è un invariante.

Esempio 1.3

Sia

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{(u/c)\cdot a_x}{(1-u^2/c^2)^2} \\ \frac{a_x}{(1-u^2/c^2)^2} \\ \frac{a_y}{1-u^2/c^2} \\ \frac{a_z}{1-u^2/c^2} \end{bmatrix}$$

la quadriaccelerazione che si ottiene derivando rispetto al tempo proprio la quadrivelocità. Si può dimostrare che $f(\underline{\alpha})$ è invariante . Infatti, eseguendo i calcoli, abbiamo che:

$$f(\underline{\alpha}) = \frac{(u^2/c^2)\cdot a_x^2}{(1-u^2/c^2)^4} - \frac{a_x^2}{(1-u^2/c^2)^4} - \frac{a_y^2}{(1-u^2/c^2)^2} - \frac{a_z^2}{(1-u^2/c^2)^2} =$$

$$= -\left(\frac{a_x}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}\right)^2 - \left(\frac{a_y}{1-u^2/c^2}\right)^2 - \left(\frac{a_z}{1-u^2/c^2}\right)^2.$$

Ora ricordando che l'accelerazione coordinata $\vec{a}$ è legata all'accelerazione nel riferimento proprio $(\vec{a_p})$ tramite le relazioni:

$a_{p_x} = \frac{a_x}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$ $\qquad a_{p_y} = \frac{a_y}{1-u^2/c^2}$ $\qquad a_{p_z} = \frac{a_z}{1-u^2/c^2}$

allora possiamo sostituire nell'espressione trovata le componenti dell'accelerazione propria, ottenendo:

$$f(\underline{\alpha}) = -a_{p_x}^2 - a_{p_y}^2 - a_{p_z}^2 = -||\vec{a}_p||^2,$$

che è invariante.

Esempio 1.4

Sia Σ un sistema di riferimento inerziale e sia in moto in esso una particella con posizione $\vec{x}(t)$ con velocità $\vec{u}(t)$ al tempo t. Ad ogni particella si può assegnare un sistema di riferimento proprio Σ_p che, per definizione, è un sistema inerziale rispetto al quale la particella che stiamo studiando ha velocità nulla.

La particella nel sistema di riferimento Σ, dopo un tempo dt varierà la sua posizione da $\vec{x}$ a $\vec{x} + d\vec{x}$ con $d\vec{x} = \vec{u}(t) \cdot dt$, per cui dt sarà la distanza temporale tra gli eventi $\underline{x}(t, \vec{x})$ e $\underline{x} + d\underline{x} = (t + dt, \vec{x} + d\vec{x})$.

Indichiamo $d\tau$ la distanza temporale tra gli eventi corrispondenti a $\underline{x}$ e $\underline{x} + d\underline{x}$ di Σ nel sistema proprio Σ_p. La relazione che intercorre tra dt e $d\tau$ è la seguente:

$$d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

La grandezza $d\tau$ è un invariante. Se calcoliamo, infatti, tale grandezza rispetto ad un sistema Σ' che si muova uniformemente rispetto a Σ allora avremo :

$$d\tau' = dt' \cdot \sqrt{1 - u'^2/c^2}$$

con dt' distanza coordinata tra $\underline{x}'$ e $(\underline{x} + d\underline{x})'$.

Affinchè $d\tau$ sia invariante si deve avere $d\tau$=$d\tau'$.
Questo risulta essere vero in quanto un sistema proprio Σ_p' è in quiete rispetto al sistema proprio Σ_p. Pertando nel passare da Σ_p' a Σ_p non cambiano le variazioni temporali tra i due eventi $d\underline{x}'$ è $d\underline{x}$.

Esempio 1.5

Sia

$$\underline{j}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} j_o \\ \vec{j}(x) \end{bmatrix}$$

il quadrivettore quadridensità di corrente. Tale quadrivettore ha componenti rispettivamente, per la parte temporale e per la parte spaziale, $j_o = \rho(\underline{x}) \cdot c$ e $\vec{j}(\underline{x}) = \rho(\underline{x}) \cdot \vec{v}(\underline{x})$. La parte temporale j_o fisicamente rappresenta il valore della densità di carica moltiplicato per la velocità della luce c, mentre $\vec{j}(x)$ è il vettore della densità di corrente.

Calcoliamo $f(\underline{j})$:

$$f(\underline{j}) = j_o^2 - ||\vec{j}(\underline{x})||^2 = \rho(\underline{x})^2 \cdot c^2 - \rho(\underline{x})^2 \cdot ||\vec{v}||^2.$$

Mettendo in evidenza $\rho^2(\underline{x})$ otteniamo

$$f(\underline{j}) = \rho^2(\underline{x}) \cdot (c^2 - ||\vec{v}||^2) = \rho^2(\underline{x}) \cdot c^2 \cdot (1 - v^2/c^2)$$

dove $v^2 = ||\vec{v}||^2$ rappresenta la velocità delle cariche nel punto generico $\underline{x}$ di Σ che stiamo considerando.

Per vedere esplicitamente che $f(\underline{j})$ è un invariante riscriviamo la relazione trovata come $(\rho(\underline{x}) \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2})^2 \cdot c^2$. Da ciò, si vede che $\rho(\underline{x}) \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = \rho_o(\underline{x}_p)$ è la densità di carica nel sistema di riferimento proprio Σ_p delle cariche in $\underline{x} \in \Sigma$, nel punto $\underline{x}_p$ corrispondente a $\underline{x}$. Tale grandezza allora è un invariante. Moltiplicando tale invariante per la velocità della luce, essendo anch'essa un invariante, il risultato sarà un invariante.

1.3 Intervallo relativistico.

La possibilità di individuare un invariante applicando la funzione f introdotta nel paragrafo 1.2 ai quadrivettori $\underline{q}$, $\underline{\alpha}$, $d\underline{x}$, $\underline{j}$ può essere estesa a tutti i quadrivettori. Considerato un qualsiasi quadrivettore $\underline{q}$ è possibile ottenere un invariante come $f(\underline{q})$.

Definizione 1.3

Sia $\underline{q}$ un quadrivettore. Viene chiamata intervallo quadratico relativistico di $\underline{q}$ il numero:

$$s^2(\underline{q}) = q_o^2 - ||\vec{q}||^2. \tag{1.1}$$

Esso è definito come la differenza tra il quadrato della componente temporale del quadrivettore e il quadrato del modulo parte spaziale.

TEOREMA 1.1

Dato un quadrivettore $\underline{q}$ allora $s^2(\underline{q})$ è un invariante:

$$s^2(\underline{q}) = s^2(\underline{q}'). \tag{1.2}$$

Dimostrazione:

Consideriamo l'intervallo quadratico relativistico di $\underline{q}'$ rispetto a Σ' che si muove con una velocità costante $\vec{v}$ lungo l'asse x rispetto al sistema coordinato Σ:

$$s^2(\underline{q}') = q_o^{'2} - q_x^{'2} - q_y^{'2} - q_z^{'2} \tag{1.3}$$

Avendo ipotizzato la direzione del moto del sistema Σ', le componenti del quadrivettore $\underline{q}'$ si possono scrivere applicando al quadrivettore $\underline{q}$ la corrispondente matrice della trasformazione di Lorentz:

$$\begin{bmatrix} q_o' \\ q_x' \\ q_y' \\ q_z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_o \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}.$$

Sostituendo in (1.3) troviamo:

$$\left(\frac{q_o - v/c \cdot q_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 - \left(\frac{q_x - v/c \cdot q_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 - q_y^2 - q_z^2 =$$

Calcoliamo i quadrati:

$$
\begin{aligned}
= & \quad \frac{q_o^2 + v^2/c^2 \cdot q_x^2 - 2 \cdot v/c \cdot q_o \cdot q_x - q_x^2 - v^2/c^2 \cdot q_o^2 + 2 \cdot v/c \cdot q_o \cdot q_x}{1 - v^2/c^2}) - \\
- & \quad q_y^2 - q_z^2 =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(1 - v^2/c^2) \cdot q_o^2 - (1 - v^2/c^2) \cdot q_x^2}{1 - v^2/c^2} - q_y^2 - q_z^2 \\
&= q_o^2 - q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 = s^2(\underline{q}).
\end{aligned}
$$

$\square$

1.4 Spazio di Minkowski.

L'invarianza di s^2 suggerisce di introdurre nello spazio quadridimensionale degli eventi una "metrica" basata su s^2, piuttosto che sulla norma euclidea, mediante la matrice

$$
\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Infatti usando la definizione di intervallo quadratico relativistico, possiamo porre

$$
\begin{aligned}
s^2(\underline{q}) = (q_o)^2 - (q_x)^2 - (q_y)^2 - (q_z)^2 &= (q_o, q_x, q_y, q_z) \bullet (q_o, -q_x, -q_y, -q_z) = \\
&= \underline{q} \bullet (\mathcal{G}\underline{q}).
\end{aligned}
$$

Si è ottenuta tale relazione moltiplicando scalarmente il vettore $\underline{q}$ per il vettore $\mathcal{G}\underline{q}$. Sostituendo $s^2(\underline{q})$ alla norma euclidea quadratica $||\underline{q}||^2 = q_0^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2$ si conferisce allo spazio degli eventi una "metrica" non euclidea, detta metrica Minkowskiana. Lo spazio degli eventi dotato di questa nuova "metrica" viene chiamato spazio di Minkowski.

Studiamo alcune proprietà dello spazio di Minkowski.

Definizione 1.4

Si definisce prodotto Minkowskiano $\underline{x} \bullet_M \underline{y}$ tra i vettori di R^4 $\underline{x}$ e $\underline{y}$, il prodotto scalare tra $\underline{x}$ e $\mathcal{G}\underline{y}$

$$
\underline{x} \bullet_M \underline{y} = x_o \cdot y_o - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3 \tag{1.4}
$$

Il prodotto Minkowskiano è una forma bilineare e simmetrica, cioè soddisfa le seguenti proprietà, di immediata verifica.

$M.1$ $(\lambda \cdot \underline{x}_1 + \mu \cdot \underline{x}_2) \bullet_M \underline{y} = \lambda \cdot (\underline{x}_1 \bullet_M \underline{y}) + \mu \cdot (\underline{x}_2 \bullet_M \underline{y})$ (lineare a sinistra)

$M.2$ $\underline{x} \bullet_M \underline{y} = \underline{y} \bullet_M \underline{x}$ (simmetrica)

Se una forma è lineare sull'argomento di sinistra e soddisfa la proprietà di simmetria, allora è lineare a destra ed è, dunque, bilineare, perciò vale la seguente ulteriore proprietà.

$M.3$ $\underline{y} \bullet_M (\lambda \cdot \underline{x}_1 + \mu \cdot \underline{x}_2) = \lambda \cdot (\underline{y} \bullet_M \underline{x}_1) + \mu \cdot (\underline{y} \bullet_M \underline{x}_2)$

Osservazione:

Il prodotto Minkowskiano si differenzia dal prodotto scalare in quanto quest'ultimo oltre ad essere una forma bilineare, simmetrica soddisfacente quindi le proprietà $(M.1)$, $(M.2)$, $(M.3)$ è anche definita positiva, cioè vale la seguente proprietà.

Proprietà di positività :

$\underline{x} \bullet \underline{x} \geq 0$, $\forall \underline{x}$; in particolare $\underline{x} \bullet \underline{x} = 0$ sse $\underline{x} = 0$.

Il prodotto Minkowskiano non soddisfa tale proprietà; infatti considerato il vettore di componenti $\underline{x} = (0, -1, 0, 0)$, il prodotto Minkowskiano tra $\underline{x}$ e sè stesso è:
$\underline{x} \bullet_M \underline{x} = (0, -1, 0, 0) \bullet (0, 1, 0, 0) = -1 < 0$.

Consideriamo ora il vettore $\underline{x} = (1, 1, 0, 0)$. Il prodotto Minkowskiano di questo vettore con se stesso restituisce lo scalare nullo. Questo contraddice la seconda condizione di positività, cioè $\underline{x} \bullet \underline{x} = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$. Infatti $\underline{x} \bullet_M \underline{x} = (1, 1, 0, 0) \bullet (1, 1, 0, 0) = 1 - 1 = 0$, ma $\underline{x} \neq 0$.

Dalla definizione di intervallo quadratico relativistico espresso sotto la forma di prodotto Minkowskiano, e dal teorema 1.1 otteniamo che :

$$\underline{q} \bullet_M \underline{q} = (L\underline{q}) \bullet_M (L\underline{q})$$

Questo porta a formulare il seguente teorema

TEOREMA 1.2

Siano $\underline{p}$ *e* $\underline{q}$ *due quadrivettori, il prodotto Minkowskiano tra di essi è un invariante:*

$$\underline{p} \bullet_M \underline{q} = (L\underline{p}) \bullet_M (L\underline{q})$$

Dimostrazione:

Indicando con $\underline{p}$ e $\underline{q}$ i due quadrivettori; i loro rispettivi intervalli quadratici relativistici sono invarianti per il teorema 1.1:

$$\underline{p} \bullet_M \underline{p} = (L\underline{p}) \bullet_M (L\underline{p}) = \underline{p}' \bullet_M \underline{p}' \tag{i}$$

$$\underline{q} \bullet_M \underline{q} = (L\underline{q}) \bullet_M (L\underline{q}) = \underline{q}' \bullet_M \underline{q}' \tag{ii}$$

Indichiamo con $\underline{w}$ la somma di $\underline{p}$ e $\underline{q}$:

$$\underline{w} = \underline{p} + \underline{q}. \tag{1.5}$$

Siccome la somma di quadrivettori è un quadrivettore vale l'invarianza dell'intervallo $s^2(w)$:

$$\underline{w} \bullet_M \underline{w} = \underline{w}' \bullet_M \underline{w}'.$$

Andando a sostituire esplicitamente la (1.5) otteniamo:

$$(\underline{p} + \underline{q}) \bullet_M (\underline{p} + \underline{q}) = (\underline{p}' + \underline{q}') \bullet_M (\underline{p}' + \underline{q}').$$

Sviluppiamo il prodotto Minkowskiano al primo e al secondo membro e abbiamo:

$$\underline{p} \bullet_M \underline{p} + \underline{q} \bullet_M \underline{q} + 2 \cdot \underline{p} \bullet_M \underline{q} = \underline{p}' \bullet_M \underline{p}' + \underline{q}' \bullet_M \underline{q}' + 2 \cdot \underline{p}' \bullet_M \underline{q}'.$$

Utilizzando la (i) e (ii) si ottiene l'uguaglianza

$$2 \cdot \underline{p} \bullet_M \underline{q} = 2 \cdot \underline{p}' \bullet_M \underline{q}',$$

da cui

$$\underline{p} \bullet_M \underline{q} = \underline{p}' \bullet_M \underline{q}'.$$

□

Il teorema appena dimostrato ci permette di dimostrare il seguente.

TEOREMA 1.3

Siano $\underline{q} = \begin{bmatrix} a \\ \vec{b} \end{bmatrix}$ *e* $\underline{p} = \begin{bmatrix} d \\ \vec{b} \end{bmatrix}$ *due quadrivettori aventi la stessa parte spaziale. Allora devono avere la stessa parte temporale* $a = b$.

Dimostrazione:

Per il teorema 1.2 il prodotto Minkowskiano $\underline{q} \cdot_M \underline{p}$ cioè $ad - \vec{b}^2$ è un invariante. Allo stesso modo, devono essere invarianti gli intervalli relativistici di $\underline{p}$ e $\underline{q}$:
$\underline{p} \cdot_M \underline{p} = d^2 - \vec{b}^2$ è un invariante e $\underline{q} \cdot_M \underline{q} = a^2 - \vec{b}^2$ è un invariante.
Per cui le seguenti tre grandezze sono invarianti:

(i) $d^2 - \vec{b}^2$
(ii) $a^2 - \vec{b}^2$
(iii) $ad - \vec{b}^2$

Sottraendo (iii) da (i) otteniamo un altro invariante :

(iv) $ad - \vec{b}^2 - d^2 + \vec{b}^2 = ad - d^2$
perchè differenza di invarianti.
Analogamente sottraendo (iii) da (ii) si ottiene l'invarianza della grandezza
(v) $ad - a^2$.
Sommando (iv) e (v) si ha ancora un invariante dato da
(vi) $ad - d^2 + ad - a^2 = 2ad - a^2 - d^2 = -(a^2 + d^2 - 2ad) = -(a - d)^2$.
Quindi $(a - d)^2$ è un invariante e lo sarà anche la sua radice quadrata

$$(a - d) \tag{1.6}$$

Se sottraiamo (ii) da (i) otteniamo allora l'invarianza

$$d^2 - \vec{b}^2 - a^2 + \vec{b}^2 = a^2 - d^2. \tag{1.7}$$

Distinguiamo quindi, due casi che ci permettano di dimostrare la tesi:

1. caso:
$$a - d = 0 \Rightarrow a = d$$
Il teorema è valido e posso concludere la dimostrazione.

2. caso:
$$a - d \neq 0.$$

Supponiamo che $a - d \neq 0$, esiste allora il rapporto tra la (1.6) e la (1.7)

$$\frac{a^2 - d^2}{a - d} = a + d \tag{1.8}$$

e il risultato è ancora una volta un invariante.
Sommando i due invarianti $a + d$ e $a - d$ otteniamo $a + d + a - d = 2a$, quindi anche la parte temporale a è invariante e allo stesso modo lo sarà d, in quanto sottraendo gli stessi due invarianti otteniamo $a + d - (a - d) = 2d$.

Siamo perciò arrivati a concludere che i due quadrivettori $\underline{p}$ e $\underline{q}$ hanno le parti temporali invarianti, ma vedremo adesso che questo può verificarsi solo se $\underline{p} = \underline{q} = \underline{0}$, che comunque implica che $a = d = 0$.

Verifichiamo quindi che, avendo un quadrivettore generico scritto nella forma $\underline{q} = \begin{bmatrix} a \\ \vec{b} \end{bmatrix}$, a è invariante solo se $\underline{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{0} \end{bmatrix}$.
Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali Σ e Σ', tali che Σ' sia in moto relativo uniforme rispetto a Σ con velocità $\vec{v}$ costante lungo la direzione x. Supponiamo che $a = g(\underline{q})$, dove $g : R^4 \to R$,
$\underline{w} = (w_0, w_1, w_2, w_3) \to g(\underline{w}) = w_0$

$$g(\underline{q}) = g(L\underline{q}).$$

Avremo allora

$$g(L\underline{q}) = g(\underline{q}') = g\left(\frac{a - (v/c) \cdot b_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{-(v/c) \cdot a + b_x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, b_y, b_z\right) = \frac{a - (v/c) \cdot b_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

che implica

$$a' = \frac{a - (v/c) \cdot b_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = a, \quad \forall v;$$

quindi dovrebbe essere

$$a = b_x = 0.$$

Pertanto, se la parte temporale a del quadrivettore $\underline{q}$ è invariante, $\underline{q}$ deve essere del tipo

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

Allo stesso modo se Σ' si muove rispetto a Σ nella direzione y con una velocità arbitraria $\vec{v} = (0, v, 0)$ otteniamo $b_y = 0$; analogamente, considerando un sistema Σ' che si muove rispetto a z, si trova $b_z = 0$.

Allora se a è invariante, $\underline{q}$ deve essere $b_x = b_y = b_z = 0$:

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ragionando analogamente, se d è invariante :

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ottenendo comunque $a = d$.

$\square$

Capitolo 2

2.1 DISPENSA TR2.B: IRRAGGIUNGIBILITÀ DINAMICA DELLA VELOCITÀ DELLA LUCE PER CORPI MASSIVI.

L'equazione del moto relativistica:

$$m_0 \cdot \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

è valida solo per punti materiali lentamente accelerati dall'azione di campi elettromagnetici. Mostreremo adesso che se la dinamica di un corpo obbedisce a questa equazione, esso non può essere accelerato sino a raggiungere la velocità della luce c.

Scriviamo la legge della dinamica relativistica per una carica puntiforme q con massa a riposo m_0.

$$m_0 \cdot \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Se il campo elettromagnetico può assumere valori arbitrari, possiamo riscrivere tale legge come:

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \vec{g}(t)$$

dove $\vec{g}(t)$ è una funzione arbitraria. Andiamo a dimostrare che tale equazione non ammette soluzioni con velocità superiori a quelle della luce, qualunque sia il campo elettromagnetico che agisce sulla carica, cioè qualunque sia $\vec{g}$, nel caso di un'unica dimensione spaziale, partendo da una velocità iniziale $v_0 < c$. Senza perdere generalità, poniamo $v_0 = 0$. Dividiamo entrambi i membri dell'equazione per c:

$$\frac{d}{dt} \frac{v(t)/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{g(t)}{c}.$$

Posto $u(t) = \frac{v(t)}{c}$, avremo che $v(0) = 0$ implica $u(0) = 0$; allora:

$$\frac{d}{dt}\frac{u(t)}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{g(t)}{c}.$$

Esplicitando la derivata al primo membro otteniamo:

$$\frac{\frac{du}{dt}\cdot\sqrt{1-u^2} - \frac{1/2\cdot(-2u\frac{du}{dt})\cdot u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} = \frac{g(t)}{c},$$

$$\frac{\frac{(1-u^2)+u^2}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dt}}{1-u^2} = \frac{g(t)}{c}.$$

Si perviene, dunque, all'equazione differenziale del primo ordine in u

$$\frac{\frac{du}{dt}}{(1-u^2)^{3/2}} = \frac{g(t)}{c}.$$

Procedendo per separazione di variabili troviamo

$$\frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} = \frac{g(t)}{c}dt.$$

Integrando tra 0 e t_0:

$$\int_0^{u(t_0)} \frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} = \int_0^{t_0} \frac{g(t)}{c}dt.$$

Il secondo membro sarà una funzione arbitraria di t_0 che possiamo indicare con $A(t_0)$; pertanto avremo

$$\int_0^{u(t_0)} \frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} = A(t_0).$$

Poichè accade che nell'intorno di $t=0$ la funzione $|u(t)|$ è più piccola di 1 , possiamo effettuare il seguente cambio di variabile:

$$u(t) = \sin\theta \Rightarrow du = \cos\theta d\theta.$$

I nuovi estremi di integrazione saranno 0 e $\theta(t_0)$; dunque

$$\int_0^{\theta(t_0)} \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^{3/2}}d\theta = \int_0^{\theta(t_0)} \frac{\cos\theta}{\cos^3\theta}d\theta = \int_0^{\theta(t_0)} \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = A(t_0).$$

Si trova facilmente così la soluzione dell'equazione che risulta essere:

$$\tan \theta(t_0) = A(t_0).$$

Come risulta chiaro dal grafico 2.1, partendo dal punto $\theta(0) = 0$, il valore $\theta(t_0)$ preso sull'asse

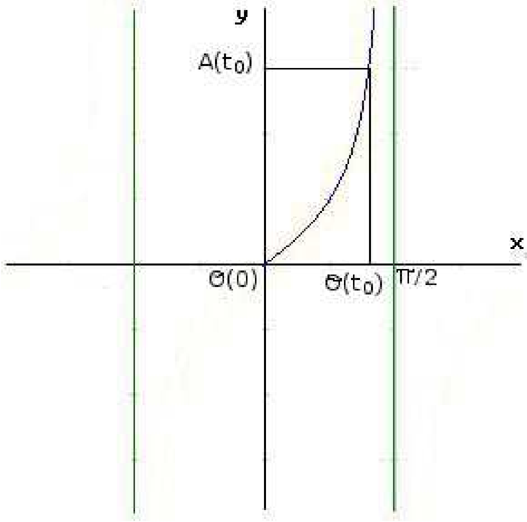

Figura 2.1: $\theta(t_0) < \frac{\pi}{2}$, per ogni valore di $A(t_0)$

delle ascisse non potrà mai superare $\frac{\pi}{2}$, anche se il corrispondente valore $A(t_0) = \tan \theta(t_0)$ tende a $+\infty$:

$$\forall A(t_0) \Rightarrow \theta(t_0) < \frac{\pi}{2}.$$

Ne consegue che $\sin \theta(t_0) < 1, \forall t_0$.
Ma

$$\sin \theta(t_0) = u(t_0) < 1, \forall t_0.$$

Si conclude dunque che

$$v(t_0) < c, \forall t_0.$$

Per cui, qualunque sia il campo a cui è sottoposta la particella, la velocità non potrà mai raggiungere la velocità della luce.

2.2 DISPENSA TR1.B: TACHIONI?

Alcune relazioni matematiche della teoria della Relatività, ad esempio le relazioni tra le velocità di una particella in diversi sistemi di riferimento, non sono definite per valori della velocità relativa maggiori o uguali a c.
Lo stesso problema di consistenza matematica sorge in relazione alle trasformazioni di Lorentz, le cui formule presentano il termine $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ al denominatore.

Esiste dunque un problema di consistenza matematica tra moti dotati di velocità superiori alla velocità della luce e la teoria della Relatività Speciale. In questo paragrafo vedremo che l'esistenza di particelle dotate di velocità superiori a c non costituirebbe solo un problema di consistenza matematica ma condurrebbe alla violazione del principio di Casualità : si potrebbero modificare eventi già accaduti.

Nella letteratura scientifica le ipotetiche particelle con velocità $w > c$ sono chiamate tachioni. Supporremo dunque di l'esistenza e la rivelabilità dei tachioni, e dimostreremo che in questo caso si potrebbe predisporre un esperimento in grado, in linea di principio, di impedire il verificarsi di un evento già accaduto.

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali Σ e Σ' legati dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x'(t') = \frac{x(t)-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y'(t') = y(t) \\ z'(t') = z(t) \\ t' = \frac{t-v/c^2 x(t)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{cases}$$

Supponiamo che esistano dei tachioni con velocità $w > c$.
Solidale al sistema Σ, in corrispondenza del punto spaziale $(-L, 0, 0)$ siano posti due dispositivi G e R_2; come rappresentato nella figura 2.2.
-Il dispositivo G è in grado di emettere tachioni con velocità w verso l'origine.
-Il dispositivo R_2 è un rivelatore di tachioni.
G e R_2 sono collegati, in maniera tale che nel momento in cui un tachione raggiunge R_2, R_2 invia un segnale a G che ne determina l'interdizione: da quel momento in poi G non potrà più emettere tachioni.

Solidale al sistema Σ', in corrispondenza dell'origine spaziale, sono posti due dispositivi R_1 e H; come nella figura 2.3.
-R_1 è un rivelatore di tachioni.
-H è un emettitore di tachioni.

I due dispositivi sono collegati in maniera tale che nel momento in cui R_1 viene raggiunto da un tachione, esso invia un impulso a H che emette, nello stesso momento, un tachione con velocità w (rispetto a Σ') verso R_2.
Riassumendo:
se R_1 rivela un tachione all'istante t'_0 di Σ' , H emette un tachione all'istante t'_0;
se R_2 rivela un tachione all'istante t_0 di Σ, $\forall t > t_0$ G non può emettere tachioni in futuro.

Adesso supponiamo che G emetta un tachione, dunque, dal punto spaziale $(-L, 0, 0)$ diΣ, ad un certo istante t_1 in modo tale che all'istante $t = 0$ il tachione raggiunga l'origine di Σ. Determiniamo t_1. L'equazione del moto del tachione è:

$$x(t) = -L + w \cdot (t - t_1). \tag{2.1}$$

Ne consegue che (sostituendo $t = 0$ nella (2.1))

$$t_1 = \frac{-L}{w}. \tag{2.2}$$

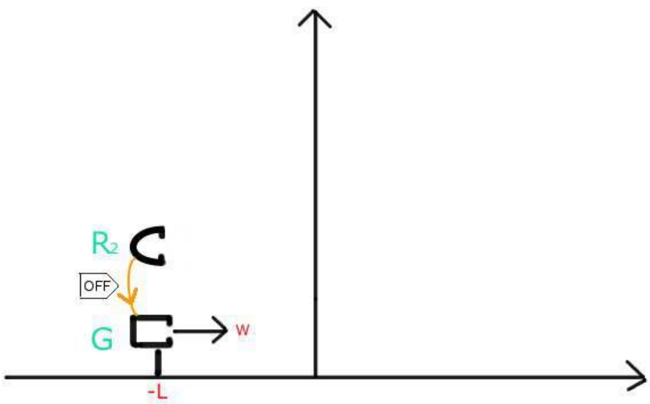

Figura 2.2: Emissione del primo tachione nel sistema Σ

Il tachione emesso da G raggiunge l'origine all'istante 0 e nel punto $\vec{0}$ di Σ.
Questo evento avviene rispetto a Σ' all'istante $t' = 0$ nel punto $\vec{x}' = (0, 0, 0)$, come ovvia conseguenza delle trasformazioni di Lorentz. Pertanto il tachione all'istante $t' = 0$ di Σ' raggiunge R_1, che è posto nell'origine di Σ'.

Il dispositivo H deve emettere allora un secondo tachione all'istante $t' = 0$.
La legge del moto di questo secondo tachione rispetto a Σ' sarà:

$$x'(t') = -wt'.$$

Nel sistema Σ tale legge, utilizzando le leggi di trasformazione di Lorentz, diventa:

$$x(t) = \frac{x'(t') + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{-(w - v)t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.3}$$

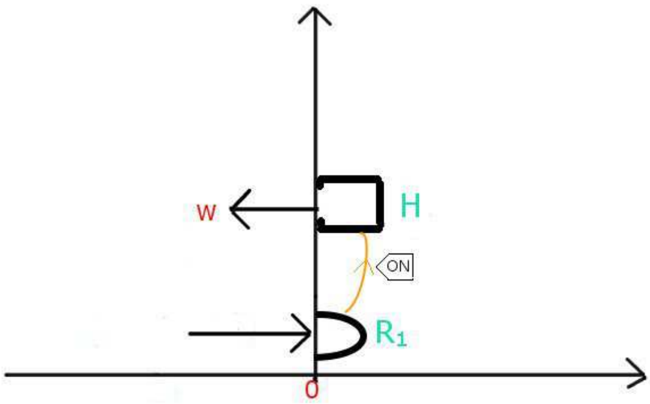

Figura 2.3: Emissione del secondo tachione nel sistema Σ'

Sia t_2 l'istante rispetto a Σ in cui questo secondo tachione raggiunge R_2, allora G cessa di funzionare $\forall t > t_2$.
La posizione spazio-temporale dell'evento *il secondo tachione raggiunge* R_2 è $(t_2, -L, 0, 0)$, rispetto a Σ.

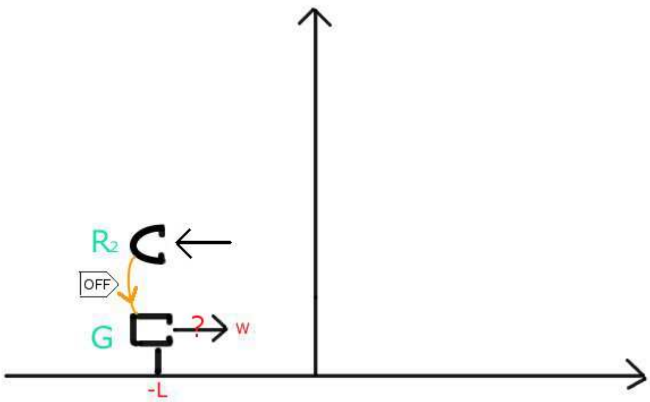

Figura 2.4: R_2 rileva il tachione emesso da H

Per la (2.3) l'istante t_2' rispetto a Σ' in cui il secondo tachione raggiunge R_2 soddisfa l'equazione

$$-L = \frac{-(w-v)t_2'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

da cui:

$$t_2' = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{w-v} \cdot L.$$

Calcoliamo l'istante t_2 in cui avviene questo evento rispetto a Σ:

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'(t_2')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{w-v} \cdot L + \frac{v}{c^2} x_2'(\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{w-v} \cdot L)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{(1 - \frac{v}{c^2} w) \cdot L}{w-v}.$$

Faremo vedere ora che qualunque sia la velocità w dei tachioni di questo esperimento immaginario, purchè maggiore di c, il sistema Σ' in cui sono collocati H e R_1 può essere scelto in maniera tale che

$$t_2 < t_1.$$

cioè il secondo tachione raggiunge R_2 *prima* che il primo tachione sia stato emesso. Allora G cessa di funzionare per ogni $t > t_2$. Questo vuol dire che l'emissione del primo tachione viene impedita: abbiamo modificato un evento già accaduto, violando il principio della casualità.

Affinchè valga la disuguaglianza $t_2 < t_1$ occorre e basta, usando la (2.2), che

$$\frac{(1 - \frac{v}{c^2}w)}{w - v} < -\frac{1}{w},$$

da cui otteniamo la condizione sulla velocità v:

$$w - \frac{v}{c^2}w^2 < -(w - v) \Rightarrow v(1 + \frac{w^2}{c^2}) > 2w \Rightarrow$$

$$v > \frac{2w}{1 + \frac{w^2}{c^2}}. \tag{2.4}$$

Faremo vedere adesso che esiste un valore di v che soddisfa questa relazione, con v inferiore a c. La funzione

$$f(w) = \frac{2w}{1 + \frac{w^2}{c^2}},$$

è decrescente per ogni $w > c$ in quanto

$$\frac{df(w)}{dw} = \frac{2(1 + \frac{w^2}{c^2}) - 2w(\frac{2w}{c^2})}{(1 + \frac{w^2}{c^2})^2} = \frac{2((1 + \frac{w^2}{c^2}) - 2(\frac{w^2}{c^2}))}{(1 + \frac{w^2}{c^2})^2} =$$

$$= \frac{2(1 - \frac{w^2}{c^2})}{(1 + \frac{w^2}{c^2})^2} < 0, \forall w > c.$$

D'altra parte $f(c) = c$. Pertanto per ogni $w > c$, $f(w) < c$; quindi esiste v tale che $f(w) < v < c$ (v. figura 2.5). Ogni tale valore v soddisfa la (2.4). Quindi se il sistema Σ' ha questa velocità v, $t_2 < t_1$, violando il principio di casualità.

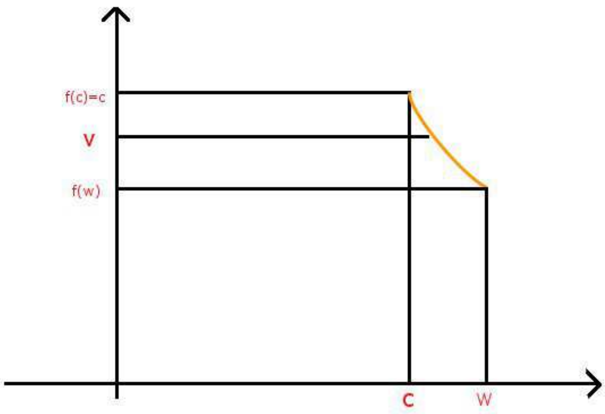

Figura 2.5: $\forall w > c$ la funzione f decresce.

2.3 DISPENSA TR2.C: LEGGI DI CONSERVAZIONE.

L'equazione del moto relativistica:

$$m_0 \cdot \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{F}_L$$

può essere riscritta in una forma analoga all'equazione non relativistica. Quest'ultima si può scrivere come

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = \vec{F},$$

dove $\vec{F}$ è la forza Newtoniana agente sul corpo, e

$$\vec{P}_c = m_0 \vec{v}$$

è la quantità di moto (classica).

La quantità di moto relativistica, o momento relativistico, di una particella di massa a riposo m_0 viene definita come

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Allora l'equazione relativistica assume la forma:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_L.$$

Questa equazione, adesso, è del tutto analoga all'equazione classica: si può formalmente ottenere da quest'ultima sostituendo la quantità di moto classica con la quantità di moto relativistica. Tuttavia, la validità della nuova equazione è vincolata da precise condizioni.

1. Le forze agenti sul corpo devono essere di natura esclusivamente elettromagnetica.
2. le accelerazioni generate dai campi elettromagnetici devono essere sufficientemente piccole, tali da poter trascurare l'effetto sul moto della radiazione emessa dal corpo che accelera.

Si pone dunque il problema di stabilire delle leggi della dinamica relativistica che valgano, in particolare, indipendentemente dalla natura delle interazioni; in meccanica classica questa è una caratteristica della legge di conservazione della quantità di moto:

(Q) *La quantità di moto di un sistema isolato è costante nel tempo.*

Questa legge di conservazione, che in meccanica classica può essere derivata dalla seconda e dalla terza legge di Newton, si dimostra utile nella soluzione di parecchi problemi di meccanica, ad esempio problemi di urto, dove la la legge che descrive l'interazione non sempre è nota. Nasce dunque la seguente questione:

vale anche in Relatività Speciale una legge di conservazione analoga alla (Q)*, così da avere una legge dinamica generalmente valida?*

Nel paragrafo successivo faremo vedere che in Relatività non vale per un sistema isolato la legge di conservazione della quantità di moto classica. Pertanto, se una legge di conservazione vale in Relatività, varrà per una grandezza diversa. dallam quantità di moto classica.

Nel paragrafo 2.7 dimostreremo che l'unica grandezza multipla della velocità che può essere conservata in Relatività è proprio la quantità di moto relativistica

$$\vec{P} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v}.$$

Questo importante risultato è stato ottenuto per la prima volta da Lewis e Tolman([1]). Bisogna sottolineare che Lewis e Tolman non dimostrano che la quantità di moto relativistica si conserva; essi provano piuttosto che se una grandezza del tipo $\mu(v^2)\vec{v}$ si conserva, allora

$$\mu(v^2) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ora il vettore

$$\vec{P} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v}$$

risulta essere la parte spaziale del quadrivettore quadrimomento

$$\underline{P} = m_0\underline{q} = \begin{bmatrix} \frac{m_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \vec{P} \end{bmatrix}$$

che si ottiene moltiplicando per l'invariante m_0 il quadrivettore quadrivelocità.

Nel paragrafo 2.8 dimostreremo che se vale la legge di conservazione della quantità di moto relativistica, allora anche la parte temporale P_0 del quadrimomento si deve necessariamente conservare.

2.4 Il momento classico non si conserva in Relatività.

Mostriamo ora che in Relatività non vale per un sistema isolato la legge di conservazione della quantità di moto classica $\vec{P}_c = m_0\vec{v}$. Per far questo, analizzeremo un urto che avviene in un sistema di riferimento Σ in maniera perfettamente simmetrica, e che soddisfa la conservazione della quantità di moto classica rispetto a Σ. Però, se la legge di conservazione è valida, essendo una legge della Fisica dovrebbe valere rispetto ad ogni sistema di riferimento Σ' in moto uniforme rispetto a Σ. Individueremo un sistema Σ' rispetto al quale lo stesso fenomeno d'urto non soddisfa la conservazione della quantità di moto classica rispetto a Σ'.

Richiamiamo dapprima che cosa si intende per urto tra due particelle. Per urto si intende un processo in cui inizialmente le due particelle, che costituiscono un sistema isolato, sono libere non interagenti; muovendosi l'una contro l'altra hanno un'interazione in una regione spaziale limitatata, ritornando ad essere particelle libere all'istante successivo.

Il fenomeno d'urto che consideriamo avviene tra due particelle massive identiche. Chiamiamo tali particelle A e B. Siano $v_{a_x} = v$ e $v_{a_y} = u$ le componenti x e y della velocità della particella A che viaggia verso l'origine del sistema di riferimento Σ. Sia la velocità della particella B con componenti $v_{b_x} = -v$ e $v_{b_y} = -u$; tale particella viaggia sulla stessa retta di A ma in verso opposto, in modo tale che urtino nell'origine di Σ (v.figura 2.6).
Il risultato dell'urto è una riflessione perfetta rispetto all'asse y sia delle traiettorie che delle velocità. Per la particella A la velocità dopo l'urto avrà pertanto coordinate $(-v, u)$, mentre per la particella B la velocità dopo l'urto sarà data da $(v, -u)$. Analizzeremo questo urto e faremo vedere che non si conserva la quantità di moto classica in un particolare sistema Σ' in moto rispetto a Σ.
Consideriamo la quantità di moto classica totale in Σ prima dell'urto, $\vec{P}_c = \vec{P}_c^A + \vec{P}_c^B$ e quella dopo l'urto, $\vec{Q}_c = \vec{Q}_c^A + \vec{Q}_c^B$.
Per la componente x abbiamo:

$$P_{c_x}^A = m_0 v, \quad P_{c_x}^B = -m_0 v; \text{ pertanto } P_{c_x} = P_{c_x}^A + P_{c_x}^B = 0.$$

Dopo l'urto si ha:

$$Q_{c_x}^A = -m_0 v, \quad Q_{c_x}^B = m_0 v; \text{ pertanto } Q_{c_x} = Q_{c_x}^A + Q_{c_x}^B = 0.$$

Allora si conserva in questo particolare urto la componente x della quantità di moto classica.

Per quanto riguarda la componente y troviamo

$$P_{c_y}^A = m_0 u, \quad P_{c_y}^B = -m_0 u; \text{ pertanto } P_{c_y} = 0.$$

Dopo l'urto abbiamo

$$Q_{c_y}^A = m_0 u, \quad Q_{c_y}^B = -m_0 u; \text{ cioè } Q_{c_y} = 0.$$

Quindi la quantità di moto è conservata rispetto a Σ.

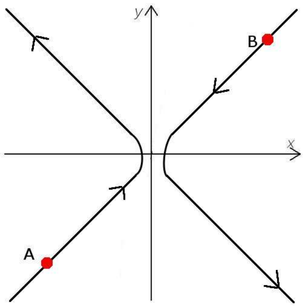

Figura 2.6: Urto a simmetria assiale nel sistema Σ

Ora consideriamo lo stesso urto per un sistema inerziale Σ', in moto nella direzione dell'asse x con una velocità costante v rispetto al sistema Σ, coincidente, quindi, con il valore della componente x della velocità di A prima dell'urto. Per calcolare la quantità di moto classica rispetto a Σ' occorre conoscere la velocità rispetto a Σ', che possono essere ottenute dalle leggi di trasformazione relativistiche:
$v'_x = \frac{v_x - v}{1-\frac{v_x \cdot v}{c^2}} \qquad v'_y = \frac{v_y \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v_x \cdot v}{c^2}}$

Prima dell'urto i valori di tali velocità sono:

$$v'_{A_x} = \frac{v-v}{1-\frac{v \cdot v}{c^2}} = 0, \qquad v'_{B_x} = \frac{-v-v}{1+\frac{v \cdot v}{c^2}} = \frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}};$$
$$v'_{A_y} = \frac{u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad v'_{B_y} = \frac{-u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}.$$

Dopo l'urto le velocità sono le seguenti:

$$v'_{A_x} = \frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}, \qquad v'_{B_x} = \frac{v-v}{1-\frac{v \cdot v}{c^2}} = 0;$$
$$v'_{A_y} = \frac{u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}, \qquad v'_{B_y} = \frac{-u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Calcoliamo la quantità di moto classica totale prima e dopo l'urto; per la componente x si ha prima dell'urto:

$$P'^{A}_{c_x} = m_0 \cdot 0, \qquad P'^{B}_{c_x} = m_0 \cdot \frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}; \text{ pertanto } P'_{c_x} = \frac{-2m_0 v}{1+\frac{v^2}{c^2}}.$$

Dopo l'urto abbiamo

$$Q'^{A}_{c_x} = m_0 \cdot \frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}, \qquad Q'^{B}_{c_x} = m_0 \cdot 0; \text{ allora } Q'_{c_x} = \frac{-2m_0 v}{1+\frac{v^2}{c^2}},$$

quindi la componente x della quantità di moto classica si conserva anche in Σ'.

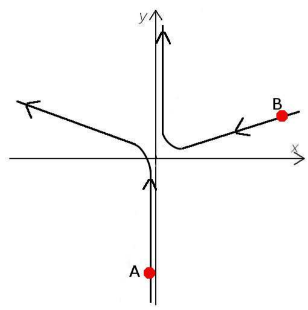

Figura 2.7: Urto nel sistema Σ' in moto

Per la componente y si ha, prima dell'urto,

$$P'^{A}_{c_y} = m_0 \cdot \frac{u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad P'^{B}_{c_y} = m_0 \cdot \frac{-u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}; \text{ pertanto } P'_{c_y} = P'^{A}_{c_y} + P'^{B}_{c_y} = \frac{2m_0 \frac{v^2}{c^2} \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^4}{c^4}}.$$

Dopo l'urto:

$$Q'^{A}_{c_y} = m_0 \cdot \frac{u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}, \quad Q'^{B}_{c_y} = m_0 \cdot \frac{-u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}; \text{ pertanto } Q'_{c_y} = Q'^{A}_{c_y} + Q'^{B}_{c_y} = \frac{-2m_0 \frac{v^2}{c^2} \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^4}{c^4}}.$$

Quindi $Q'_{c_y} = -P'_{c_y}$, cioè la componente x della quantità di moto classica non si conserva in Σ'!

2.5 Cosa si può conservare in Relatività?

La violazione della conservazione della quantità di moto classica in Relatività pone il problema di verificare se esiste una grandezza che sostituisca la quantità di moto classica e soddisfi la legge di conservazione anche in Relatività.

In questo paragrafo faremo vedere che se a ogni particella si può associare una grandezza del tipo

$$\vec{P} = \mu(v^2) \cdot \vec{v} \tag{2.5}$$

che si conserva, allora la funzione $\mu(v^2)$, che caratterizza la particella, deve avere necessariamente la forma

$$\mu(v^2) = \frac{\mu(0)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Per ottenere questo risultato, consideriamo lo stesso fenomeno d'urto tra particelle identiche del paragrafo precedente. Siccome le particelle coinvolte sono identiche, la funzione μ è la stessa per le due particelle: $\mu_A = \mu_B = \mu$.

Indichiamo con $\vec{P}^A$, $\vec{P}^B$ ($\vec{Q}^A$, $\vec{Q}^B$) le grandezze (2.5) per le particelle A, B prima (dopo) dell'urto. Le velocità prima e dopo l'urto sono note: sono quelle individuate nel paragrafo precedente. Pertanto possiamo calcolare $\vec{P} = \vec{P}^A + \vec{P}^B$ e $\vec{Q} = \vec{Q}^A + \vec{Q}^B$ componente per componente. Così facendo si verifica facilmente che $\vec{P} = \vec{Q}$ qualunque sia la funzione μ.

Siccome sono note le velocità prima e dopo l'urto anche rispetto al sistema Σ' introdotto nel paragrafo precedente, possiamo calcolare $\vec{P}' = \vec{P}'^A + \vec{P}'^B$ e $\vec{Q}' = \vec{Q}'^A + \vec{Q}'^B$, cioè le grandezze (2.5) rispetto a Σ'. Verifichiamo che affinchè

$$\vec{P}' = \vec{Q}' \tag{2.6}$$

la funzione μ deve essere tale che $\mu(w^2) = \frac{\mu(0)}{1-\frac{w^2}{c^2}}$. La componente x dell'equazione (2.6) è $P_x'^A + P_x'^B = Q_x'^A + Q_x'^B$, cioè

$$\mu(v_A'^2) \cdot v'_{A_x} + \mu(v_B'^2) \cdot v'_{B_x} = \mu(v_A'^2) \cdot v'_{A_x} + \mu(v_B'^2) \cdot v'_{B_x}.$$

Sostituendo i corrispondenti valori delle velocità abbiamo:

$$\mu\left(0 + \frac{u^2 \cdot (1 - v^2/c^2)}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}\right) \cdot 0 + \mu\left(\frac{4v^2}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2} + \frac{u^2 \cdot (1 - v^2/c^2)}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}\right) \cdot \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \mu\left(\frac{4v^2}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2} + \frac{u^2 \cdot (1 - v^2/c^2)}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}\right) \cdot \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} + \mu\left(0 + \frac{u^2 \cdot (1 - v^2/c^2)}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}\right) \cdot 0,$$

da cui semplificando:

$$\mu\left(\frac{4v^2 + u^2 \cdot (1 - v^2/c^2)}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}\right) \cdot \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \mu\left(\frac{4v^2 + u^2 \cdot (1 - v^2/c^2)}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}\right) \cdot \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}.$$

Qualsiasi sia il valore di v e di u, l'equazione è soddisfatta indipendentemente dalla forma di μ.

La componente y della (2.6) è $P_y'^A + P_y'^B = Q_y'^A + Q_y'^B$, cioè

$$\mu(v_A'^2) \cdot v'_{A_y} + \mu(v_B'^2) \cdot v'_{B_y} = \mu(v_A'^2) \cdot v'_{A_y} + \mu(v_B'^2) \cdot v'_{B_y}.$$

Sostituendo i valori delle velocità otteniamo

$$\mu\left(0 + \frac{u^2 \cdot (1 - v^2/c^2)}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}\right) \cdot \frac{u \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \mu\left(\frac{4v^2}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2} + \frac{u^2 \cdot (1 - v^2/c^2)}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}\right) \cdot$$
$$\cdot \frac{-u \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \mu \left(\frac{4v^2}{(1+\frac{v^2}{c^2})^2} + \frac{u^2 \cdot (1-v^2/c^2)}{(1+\frac{v^2}{c^2})^2} \right) \cdot \frac{u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}} \quad + \quad \mu \left(0 + \frac{u^2 \cdot (1-v^2/c^2)}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \right) \cdot$$
$$\cdot \quad \frac{-u \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

La condizione che stiamo imponendo è che la (2.6) deve valere per ogni valore di u e di v, in particolare per $u = 0$; sostituendo nell'ultima uguaglianza otteniamo:

$$\mu(0) \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \mu \left(\frac{4v^2}{(1+\frac{v^2}{c^2})^2} \right) \cdot \frac{1}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \mu \left(\frac{4v^2}{(1+\frac{v^2}{c^2})^2} \right) \cdot \frac{1}{1+\frac{v^2}{c^2}} - \mu(0) \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

da cui:

$$2\frac{\mu(0)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2\mu \left(\frac{4v^2}{(1+\frac{v^2}{c^2})^2} \right) \cdot \frac{1}{1+\frac{v^2}{c^2}},$$

cioè

$$\frac{\mu(0)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \mu(\frac{4v^2}{(1+\frac{v^2}{c^2})^2}) \cdot \frac{1}{1+\frac{v^2}{c^2}}. \tag{2.7}$$

Poniamo ora

$$w^2 = \frac{4v^2}{(1+\frac{v^2}{c^2})^2}. \tag{2.8}$$

L'equazione (2.7) diventa :

$$\mu(w^2) = \mu(0) \cdot \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{2.9}$$

Scrivendo il rapporto $\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ in funzione di w^2 si ha la relazione

$$\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}},$$

che può essere verificata usando la (2.8). Allora la (2.9) diventa $\mu(w^2) = \mu(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}$.
Quindi $\mu(v^2) = \mu(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, che è quanto da dimostrare.

2.6 Quadrimomento relativistico :

Abbiamo dimostrato precedentemente che l'unica grandezza che possa sostituire la quantità di moto classica nella formulazione di una valida legge di conservazione in un processo d'urto è il momento relativistico.

Se una tale nuova legge sia effettivamente valida in natura non è, naturalmente, un problema risolvibile deduttivamente usando metodi logico-matematici: si può solamente verificare con l'osservazione sperimentale se tale legge viene rispettata nei fenomeni fisici che realmente accadono in natura.

Ogni osservazione realizzata finora ha confermato la validità empirica della legge di conservazione del momento relativistico. Pertanto possiamo postulare la seguente legge.

Conservazione del momento.
Il momento relativistico di un sistema isolato si conserva.

Ora, il momento

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

di una particella risulta essere parte spaziale del quadrivettore $\underline{P}$ che si ottiene moltiplicando la massa a riposo, che è invariante, per la quadrivelocità $\underline{q} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \begin{bmatrix} c \\ \vec{v}(t) \end{bmatrix}$, cioè

$$\underline{P} = m_0 \cdot \underline{q} = \begin{bmatrix} \frac{m_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \vec{P} \end{bmatrix}.$$

P_0 indica la parte temporale del quadrimomento relativistico.

Dimostriamo adesso che la conservazione del momento $\vec{P}$ obbliga anche la parte temporale P_0 del quadrimomento a conservarsi. Precisamente, faremo vedere che la legge di conservazione del momento in un fenomeno d'urto implica sempre la conservazione anche della parte temporale nello stesso fenomeno.

TEOREMA 2.1 :

Sia valida la conservazione del momento relativistico. Allora il quadrimomento relativistico si conserva.

Dimostrazione :

Si consideri l'urto tra due particelle massive aventi rispettivamente prima dell'urto momenti relativistici $\vec{P}^1$ e $\vec{P}^2$, e dopo l'urto $\vec{Q}^1$ e $\vec{Q}^2$.
I quadrivettori quadrimomento relativi alle due particelle sono

$$\begin{bmatrix} P_0^1 \\ \vec{P}^1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} P_0^2 \\ \vec{P}^2 \end{bmatrix}.$$

Sommando i quadrivettori $\underline{P}^1$ e $\underline{P}^2$ otteniamo il quadrimomento totale $\underline{P} = \underline{P}^1 + \underline{P}^2$ prima dell'urto, che deve essere ancora un quadrivettore avente come parte temporale la somma delle componenti temporali dei quadrimomenti e come parte spaziale la somma delle rispettive parti spaziali:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \vec{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0^1 + P_0^2 \\ \vec{P}^1 + \vec{P}^2 \end{bmatrix}.$$

Allo stesso modo, il quadrimomento totale dopo l'urto

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_0^1 \\ \vec{Q}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_0^2 \\ \vec{Q}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0^1 + Q_0^2 \\ \vec{Q}^1 + \vec{Q}^2 \end{bmatrix}$$

è un quadrivettore.

I quadrivettori $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ devono avere la stessa parte spaziale, per la legge di conservazione del momento relativistico: $\vec{P} = \vec{Q}$.

Il teorema 1.3 (dispensa 1.C) stabilisce che se due quadrivettori hanno la stessa parte spaziale, anche le loro parti temporali devono coincidere. Pertanto:

$$P_0 = Q_0,$$

cioè vale la legge di conservazione della parte temporale del quadrimomento:

$$P_0^1 + P_0^2 = Q_0^1 + Q_0^2.$$

□

Capitolo 3

Dispensa TR2.D: Energia Relativistica

Il momento relativistico di una particella, $\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, differisce dal momento classico $\vec{P}_c = m_0 \vec{v}$ per infinitesimi di ordine $\frac{3}{2}$ nella variabile $\frac{v^2}{c^2}$, come si può verificare facilmente sviluppando in serie di Taylor la funzione $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ rispetto a $\frac{v^2}{c^2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right);$$

sostituendo nella differenza $\vec{P} - \vec{P}_c$ si ottiene

$$|\vec{P} - \vec{P}_c| = \frac{1}{2} m_0 \frac{v^3}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) = O\left[\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Questo fatto giustifica l'interpretazione di $\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ come la naturale generalizzazione relativistica del concetto di momento classico.

Se applichiamo lo stesso argomento alla parte temporale P_0 del quadrimomento, troviamo che la grandezza classica di cui essa costituisce la generalizzazione relativistica è l'energia cinetica. Infatti, utilizzando lo sviluppo di Taylor di $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ troviamo

$$P_0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = c\left(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + O\left(\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right)\right),$$

per cui

$$\frac{P_0}{c} - \frac{1}{2} m_0 v^2 = m_0 c^2 + O\left(\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right).$$

Pertanto, $\frac{P_0}{c}$ differisce dall'energia cinetica classica per un infinitesimo di ordine 2 di $\frac{v^2}{c^2}$, più la costante additiva $m_0 c^2$. Per questo motivo $E = \frac{P_0}{c}$ viene interpretata come la generalizzazione relativistica del concetto di energia classica.

Se adottiamo questo punto di vista, il teorema 2.1 può essere interpretato come un teorema di conservazione dell'energia relativistica in un fenomeno d'urto, e in particolare per un sistema isolato. Adesso vedremo come da questo teorema scaturisce la relazione relativistica tra massa e energia. Per far questo applicheremo le legge di conservazione del quadrimomento ad un particolare urto tra "fotoni" e un corpo di massa m_0.

Introduciamo il concetto di "fotone". L'energia di una radiazione elettromagnetica di frequenza ν si propaga nello spazio in pacchetti ognuno dei quali possiede un'energia $\epsilon = h\nu$, dove h è una costante universale (costante di Planck) che ha il valore $h \cong 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$. Siccome le onde elettromagnetiche si propagano con la velocità della luce c, ogni pacchetto deve avere questo valore della velocità e massa a riposo nulla. Questi pacchetti possono essere considerati dunque come vere e proprie particelle di massa a riposo nulla e energia relativistica $h\nu$, e sono chiamati fotoni.

Se vogliamo descrivere un processo d'urto che coinvolge fotoni, dobbiamo essere in grado di associare a ognuno di essi un quadrimomento $\underline{P}^f = \begin{bmatrix} P_0^f \\ \vec{P}^f \end{bmatrix}$.

Abbiamo visto che la *parte temporale* del quadrimomento di una particella è sempre il rapporto tra la sua energia relativistica E e la velocità della luce c : $P_0 = \frac{E}{c}$. L'energia relativistica di un fotone è $h\nu$; pertanto la parte temporale del quadrimomento $\underline{P}^f$ sarà

$$P_0^f = \frac{h\nu}{c}.$$

Per individuare la *parte spaziale* $\vec{P}^f$, osserviamo che se $\underline{P} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \vec{P} \end{bmatrix}$ è il quadrimomento di una qualunque particella, abbiamo che

$$\frac{P}{P_0} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} : \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{v}{c},$$

dove $P \equiv |\vec{P}|$: il rapporto $\frac{P}{P_0}$ è uguale al rapporto tra la velocità della particella e c, indipendentemente dal valore della massa.

Per un fotone dovremo allora avere

$$\frac{P^f}{P_0^f} = \frac{c}{c} = 1, \quad \text{cioè} \quad P^f = |\vec{P}^f| = 1 \cdot P_0^f = \frac{h\nu}{c}.$$

Pertanto il momento $\vec{P}^f$ di un fotone è $\vec{P}^f = \frac{h\nu}{c}\vec{n}$, dove $\vec{n}$ è il versore della sua velocità.

Quindi, dato un fotone di frequenza ν, il suo quadrimomento è

$$\underline{P}^f = \begin{bmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ \frac{h\nu}{c}\vec{n} \end{bmatrix}.$$

3.1 Relazione massa-energia

La derivazione seguente della relazione massa-energia si basa sul principio di conservazione del quadrimomento in un fenomeno d'urto. Si rittrraà valido, dunque, il principio di conservazione del quadrimomento.

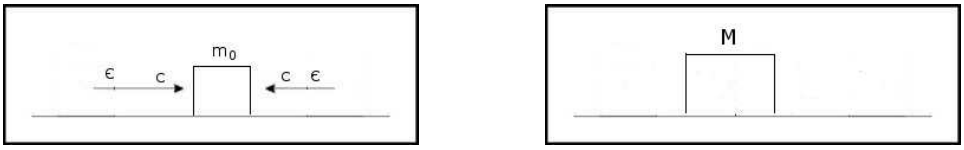

Figura 3.1: Urto d'assorbimento di fotoni

Consideriamo un corpo inizialmente fermo, in un sistema inerziale, con massa a riposo m_0. Due fotoni identici di frequenza ν viaggiano l'uno contro l'altro, dunque sulla stessa retta, verso il corpo in maniera che il duplice urto con il corpo avviene allo stesso istante, e i fotoni vengono completamente assorbiti dal corpo. L'oggetto finale ha una massa a riposo sconosciuta M.

I quadrimomenti relativistici dei fotoni prima dell'urto sono

$$\underline{P}_1^f = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{c} \\ \frac{\epsilon}{c}\vec{n} \end{bmatrix} \quad \underline{P}_2^f = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{c} \\ -\frac{\epsilon}{c}\vec{n} \end{bmatrix}.$$

Prima dell'urto la somma delle componenti dei momenti relativistici è nulla:

$$\vec{P}_1^f + \vec{P}_2^f + \vec{P}^c = \frac{\epsilon}{c}\vec{n} - \frac{\epsilon}{c}\vec{n} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Dopo l'urto, indicando con $\vec{u}$ la velocità dell'unico corpo il quadrimomento relativistico si scrive come :

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ \vec{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M\cdot c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ \frac{M\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{bmatrix}.$$

Ne consegue per la conservazione del momento relativistico che:

$$\vec{P} = \vec{Q} \Rightarrow 0 = \frac{M\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Ne deriva, dunque,

$$\vec{u} = 0. \tag{3.1}$$

Non abbiamo ancora informazioni sulla massa M del corpo formatosi in seguito all'urto; utilizziamo dunque il risultato ottenuto nel teorema 2.1, sulla conservazione della parte temporale del quadrimomento relativistico.

La parte temporale totale prima dell'urto ha espressione:

$$P_0 = 2\frac{\epsilon}{c} + m_0 c.$$

La parte temporale totale dopo l'urto è:

$$P_0 = \frac{M \cdot c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = M \cdot c$$

per la (3.1). Se deve essere valida la conservazione di tutto il quadrimomento, allora

$$2\frac{\epsilon}{c} + m_0 c = Mc,$$

cioè

$$M = m_0 + 2\frac{\epsilon}{c^2} \tag{3.2}$$

pervenendo al seguente risultato:
La massa dell'oggetto che si forma dopo l'assorbimento dei fotoni deve essere maggiore della massa iniziale

$$M > m_0.$$

Il sistema ha dunque aumentato la massa. Siccome l'incremento $\Delta M = M - m_0$ è una conseguenza della conservazione della parte temporale del quadrimomento, cioè della conservazione dell'energia relativistica, deve essere possibile determinare la relazione tra ΔM e l'energia $E = 2\epsilon$ dei fotoni. Dalla (3.2) otteniamo

$$\Delta M = M - m_0 = 2\frac{\epsilon}{c^2} = \frac{E}{c^2},$$

cioè

$$E = \Delta M c^2. \tag{3.3}$$

Pertanto, la conservazione del quadrimomento in questo processo impone la relazione (3.3) tra l'incremento di massa ΔM e l'energia dei fotoni assorbiti, che si è dunque "trasformata" in massa.

3.2 Energia Relativistica

Sia

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \frac{m_0 \cdot c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

il quadrimomento di una particella lentamente accelerata da interazioni di natura elettromagnetica, che obbedisce alla legge

$$\vec{F}_L = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

vale a dire, la forza di Lorentz è pari alla variazione della quantità di moto nel tempo. Utilizzando la definizione relativistica di quantità di moto $\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, abbiamo

$$\vec{F}_L = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Poichè $\vec{v}$ è una grandezza vettoriale e $\vec{F}_L$ può avere una forma non semplice, tale equazione risulta non sempre agevole da risolvere. Supponiamo tuttavia di studiare un moto unidimensionale e di usare quest'espressione per trovare la relazione tra l'energia relativistica e il lavoro W compiuto dalla forza $\vec{F}_L$ per imprimere alla particella la velocità v, partendo da ferma. Si pone dunque:

$$W = \int_0^{r(v)} F_L dx.$$

sostituendo

$$W = \int_0^{r(v)} \frac{d}{dt} \frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}} dx = \int_0^{t(v)} v(t) \left(\frac{d}{dt} \frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}} \right) dt;$$

integrando per parti si ottiene:

$$W = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} du =$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - m_0 c^2.$$

Eseguendo il denominatore comune tra i primi due termini si ottiene proprio la differenza tra l'energia relativistica di una particella che si muove con velocità v rispetto ad un osservatore e l'energia relativistica $m_0 c^2$ che aveva da ferma:

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = E - m_0 c^2.$$

A questo punto si vede che l'energia totale della particella è pari alla somma della sua energia cinetica e della sua energia a riposo:

$$E = W + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

L'argomentazione che abbiamo sviluppato rende ancora più chiara l'identificazione della componente temporale con l'energia E associata alla particella (diviso c per immediate considerazioni dimensionali) mentre le componenti spaziali sono identificate con la definizione relativistica della quantità di moto.

Bibliografia

[1] G. N. Lewis, R. Tolman, The principle of Relativity, and Non-Newtonian Mechanics, *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, **44** (1909) 709.

[2] M. Born, *La Sintesi Einsteiniana*, Universale scientifica Boringhieri, Torino 1969.

[3] W. Pauli, *Teoria della Relatività*, Boringhieri, Torino 1974.

[4] D. Bohm, *The Special Theory of Relativity*, W. A. Benjamin Inc., New York 1965.

[5] G. Faraco, G. Nisticò, *Alternative introduction of the basic concepts of Special Relativity* in "HSCI2006 - Hands on Science", p.298, Costa M.F. and Dorrio B.V.(eds) H-Sci , Braga (Portugal) 2006.

[6] G. Bergmann, *Theory of Relativity*, Dover Publications Inc., New York 1942.