Università della Calabria

Corso di Laurea in Ingegneria A.A. 2020-2021

Algebra Lineare e Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n. 5

5.1. Dire se i seguenti vettori di V sono linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti.

1) $(1,0);(0,-1)$ in $\mathbb{R}^2$;

2) $(2,2);(-3,-3)$ in $\mathbb{R}^2$;

3) $(1,2,3);(1,-1,0);(-1,3,-2)$ in $\mathbb{R}^3$;

4) $(-1,-1,-2);(2,2,3);(2,2,2)$ in $\mathbb{R}^3$;

5) $(1,0,1);(1,2,4)$ in $\mathbb{R}^3$;

6) $(1,,2,2);(2,4,4)$ in $\mathbb{R}^3$;

7) $(1,2,3,4);(1,-1,5,7);(-1,4,-7,-10);(1,0,0,1)$ in $\mathbb{R}^4$;

8) $(1,-1,1,-1,1);(-1,1,-1,1,1)$ in $\mathbb{R}^5$;

9) 1;2; 3 in $\mathbb{R}$;

10) $(i,0);(0,i)$ in $\mathbb{C}^2$;

11) $1;i$ in $\mathbb{C}$;

12) $(1,1,i);(i,i,-1)$ in $\mathbb{C}^3$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $M^{2\times 2}(\mathbb{R})$;

14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $M^{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5.2. Dire se i seguenti vettori di V sono linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti. Inoltre dire se generano V. Dire se sono una base di V. Nel caso in cui siano linearmente dipendenti estrarre una base del sottospazio di V da essi generato.

1) $(1,2,3,-1);(2,4,6,0);(0,0,0,1);(-1,-2,-3,3)$ in $V=\mathbb{R}^4$;

2) $(1,2,-1,0,2);(-1,-2,0,0,-2);(0,0,1,1,0);(0,0,1,0,0);(2,4,0,1,4)$ in $V=\mathbb{R}^5$;

3) $1;1+i$ in $V=\mathbb{C}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$;

4) $(1,2,3,1);(1,2,3,0);(0,0,1,-1);(-1,-2,0,1)$ in $V=\mathbb{R}^4$;

5) $(1,0,-1);(1,0,1);(2,1,2)$ in $V=\mathbb{R}^3$;

6) $(1,1,-1);(-1,-1,1);(2,2,-2);(-2,-2,2)$ in $V=\mathbb{R}^3$;

7) $(1,0,0);(0,0,1);(1,1,1);(2,-2,2)$ in $V=\mathbb{R}^3$;

8) $(1,0,0);(0,0,1);(1,1,1)$ in $V=\mathbb{R}^3$;

9) $(1,0,0);(0,1,1)$ in $V=\mathbb{R}^3$;

10) $(1,0,0,1)$ in $V=\mathbb{R}^4$.

11) 1;2; 3 in $V=\mathbb{R}$;

12) $1;1+i$ in $V=\mathbb{C}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$;

13) $1;1+i$ in $V=\mathbb{C}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$;

14) $(1,0),(0,1+2i)$ in $V=\mathbb{C}^{\nvDash}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$;

15) $(1,i),(i,-1)$ in $V=\mathbb{C}^{\nvDash}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$;

16) $(1,i),(i,-11)$ in $V=\mathbb{C}^{\nvDash}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

5.3 Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 =< (1,1,0,1),(1,2,1,0) >$$
$$W_2 =< (-1,0,1,0),(2,3,1,0),(1,1,1,0) >$$

Calcolare una base e la dimensione di W_1, W_2, $W_1\cap W_2$ e W_1+W_2. Dire se W_1+W_2 è una somma diretta.

5.4. Dire quali tra le seguenti applicazioni tra spazi vettoriali sono lineari

1) $$f_1: \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^x\end{array}$$

2) $$f_2: \begin{array}{l}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\\ (x,y,z)\mapsto(x+y,x+y-z)\end{array}$$

3) $$f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2, 2x) \end{array}$$

4) $$f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto 2x \end{array}$$

5) $$f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5 \\ x \mapsto (x, -x, 2x, -2x, 0) \end{array}$$

6) $$f_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y) \mapsto (x+2y, 3y, -x, 2+x) \end{array}$$

5.5. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbf{K})$, $A = \{a_{i,j}\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Si definisce *traccia di A* l'elemento di $\mathbb{K}$ ottenuto come somma degli elementi della diagonale principale di A, i. e. $Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. L'applicazione definita da

$$\begin{aligned} T_r :& M_{n,n}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ & A \mapsto Tr(A) \end{aligned}$$

si chiama *Traccia*. Dire se la *Traccia* è un'applicazione lineare.