A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Algebra Lineare e Geometria

Esame scritto del 07-07-2014

Primo esercizio. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & k & k \\ k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 2k-2 & k & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare il determinante della matrice T_k. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice ha rango massimo?

b) Per $k = 1$ calcolare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare associata a T_1.

Secondo esercizio. Al variare di k in $\mathbb{R}$, risolvere il sistema lineare $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2k-1 & 2 & 1 \\ 2k-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Terzo esercizio. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Trovare autovalori, autovettori e autospazi di A. Dire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla. In particolare scrivere, se esiste, una base b diagonalizzante per A e scrivere le matrici che danno i cambiamenti di coordinate tra b e la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice A è simmetrica?

Quarto esercizio.

a) Scrivere il fascio di rette $\mathfrak{F}$ passanti per $P_1 = (-1, 1, 1)$. In particolare determinare la retta $r \in \mathfrak{F}$ parallela alla retta

$$l = \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 - \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

b) Trovare il piano π passante per P_1, $P_2 = (1, -1, 2)$ e $P_3 = (0, 0, 0)$. Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di piani paralleli a π.

c) Trovare la distanza tra r e il punto $P_4 = (1, 2, -1)$.