A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Algebra Lineare e Geometria

Esame scritto del 22-02-2014

Primo esercizio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Descrivere il nucleo e l'immagine di f, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base. Dire se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.

b) Trovare $\mathrm{Im}f^{\perp}$, il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ortogonale a $\mathrm{Im}f$.

Secondo esercizio. Siano

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k-4 & k^2-4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Discutere il numero di soluzioni del sistema lineare $AX = B$, al variare di k in $\mathbb{R}$.

Terzo esercizio. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare autovalori, autovettori e autospazi di A. Dire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla. In particolare scrivere, se esiste, una base b diagonalizzante per A e scrivere le matrici che danno i cambiamenti di coordinate tra b e la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Dire se esiste una base ortonormale diagonalizzante per A. In caso affermativo trovarla.

Quarto esercizio.

a) Trovare la retta l che passa per $P_1 = (1, -2, -1)$ ed è ortogonale al fascio di piani

$$\mathcal{F} : 2x + 3y + z = k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

b) Trovare il piano π che passa per $P_2 = (0, 2, 0)$ ed è ortogonale a l.

c) Trovare il punto d'intersezione P_3 tra π e l.

d) Trovare la retta r che passa per P_1 e $P_4 = (0, -1, 1)$.

e) Calcolare la distanza tra π e r.