A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Algebra Lineare e Geometria

Esame scritto del 24-06-2014

Primo esercizio.

a) Descrivere il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base. Dire se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.

$$f_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Descrivere il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base. Dire se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.

$$f_2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Secondo esercizio. Trovare autovalori, autovettori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla. In particolare scrivere, se esiste, una base b diagonalizzante per A e scrivere le matrici che danno i cambiamenti di coordinate tra b e la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Terzo esercizio.

a) Trovare la retta r che passa per $P_1 = (0, 2, -2)$ e $P_2 = (-1, 1, -2)$. La retta r passa per $(0, 0, 0)$?.

b) Scrivere il fascio di piani $\mathfrak{F}$ ortogonali a r. Tra i piani di $\mathfrak{F}$, trovare il piano π passante per $(0, 0, 0)$.

c) Trovare il punto di intersezione tra r e π. Calcolare la distanza tra P_1 e π.

Quarto esercizio. Risolvere il seguente sistema lineare al variare di k in $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 2k & k & k-1 \\ 2k & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dove $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. In particolare dire quante soluzioni ci sono per ogni $k \in \mathbb{R}$.