A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Matematica
Geometria Proiettiva, Curve e Superfici

A. Canetti-L. Paladino

Appello del 04-09-2014
Parte di geometria proiettiva

Primo esercizio di geometria proiettiva. (7,5 punti)

a) In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sia $\widetilde{\mathcal{I}}$ l'ipersuperficie di equazione

$$x_0x_4 - x_0x_3 + x_0x_2 + x_0x_1 - x_3^2 + x_1^2 = 0.$$

a.1) Calcolare i punti impropri $\mathcal{I}$ di $\widetilde{\mathcal{I}}$ rispetto all'iperpiano

$$H_4 = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{R}) | x_4 = 0\}.$$

(1 punto)

a.2) Identificare H_4 con uno spazio proiettivo su $\mathbb{R}$ e trovare la forma canonica di $\mathcal{I}$ in H_4. (2 punti)

a.3) Sia U_2 il sottospazio proiettivo di H_4 formato dai punti aventi la coordinata x_2 non nulla e sia j_2^{-1} l'isomorfismo canonico tra U_2 e $\mathbb{R}^3$. Trovare l'immagine $j_2^{-1}(\mathcal{I})$ e scriverla in forma canonica. La quadrica $j_2^{-1}(\mathcal{I})$ ammette punti singolari? (2 punti e 1/2)

b) Disegnare in $\mathbb{R}^3$ la quadrica di equazione $4x^2 - 9y^2 + 4z^2 = 0$. (2 punti)

Spazio per la costruzione della risposta.

Secondo esercizio di geometria proiettiva. (7,5 punti)

Sia R_S il riferimento standard di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Considerare l'isomorfismo $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con applicazione lineare associata rappresentata dalla matrice

$$[\varphi_l]_{R_S}^{R_S} = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 5 & -i \end{pmatrix}.$$

a) Trovare l'immagine tramite φ del punto proiettivo definito da $x_0+x_1 = 0$. (1 punto)

b) Trovare i punti fissi A e B di φ. (2 punti)

c) Scrivere un riferimento $R = \{A, B, U\}$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, dove U è il punto unità e scrivere una base normalizzata per R. (1 punto)

d) Scrivere la matrice $[\varphi_l]_R^R$ che rappresenta φ rispetto al riferimento R e calcolare il birapporto $\beta(A, B, U, \varphi(U))$. (2 punti)

e) Considerato R come riferimento, trovare l'immagine tramite φ del punto P definito da $x_0 + x_1 = 0$ in tale riferimento. L'isomorfismo φ fissa il punto P? (1 punto e 1/2)

Tutte le risposte ai due esercizi devono essere giustificate. Buon lavoro!

Spazio per la costruzione della risposta.