A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Matematica
Geometria Proiettiva, Curve e Superfici

A. Canetti-L. Paladino

Parte di geometria proiettiva

Primo esercizio. (8 punti)

a) In $\mathbb{R}^3$ si consideri la quadrica di equazione

$$\mathcal{I}: \ 2y^2 - 3y - 4yz + 2xz - x^2 + x - 3 = -1.$$

- **a.1)** Scrivere $\mathcal{I}$ in forma canonica. (2 punti)
- **a.2)** Per ogni $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, sia j_i l'isomorfismo canonico tra $\mathbb{R}^3$ e $U_i = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) | x_i \neq 0\}$. Trovare l'immagine $j_0(\mathcal{I})$, dire di quale quadrica proiettiva si tratta e calcolare i suoi punti impropri rispetto all'immersione fatta con j_0. (2 punti)
- **a.3)** Sia $\widetilde{\mathcal{I}}$ l'ipersuperficie di equazione $x - 2y = 0$. Considerare i polinomi che danno le equazioni di $\mathcal{I}$ e $\widetilde{\mathcal{I}}$ come polinomi di $\mathbb{R}[x]$ e calcolare il loro risultante rispetto alla variabile x. Quante intersezioni ci sono tra $\mathcal{I}$ e $\widetilde{\mathcal{I}}$? (2 punti)

b) In $\mathbb{R}^3$ disegnare la quadrica di equazione $4x^2 + y^2 + 2y + 1 + z = 0$.

(2 punti)

Secondo esercizio. (7 punti)

a) In $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, siano

$$P_1 = [1, -i], \;\; P_2 = [i, 2], \;\; P_3 = [3i, 5],$$
$$Q_1 = [i, 0], \; Q_2 = [-2i, 2], \; Q_3 = [-3i, 2].$$

Dire se le terne $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ formano due riferimenti proiettivi. In caso affermativo, trovare un isomorfismo φ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$, per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$. Dire se φ è unico. Dire se φ ammette punti fissi e, in caso affermativo, scrivere φ rispetto al riferimento $R = \{A, B, P\}$, dove A e B sono i punti fissi di φ e P è il punto unità. (5 punti)

(N.B. Laddove si trovasse $\sqrt{a + ib}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si potrà lasciare come $\sqrt{a + ib}$).

b) Dimostrare che l'identità è l'unico isomorfismo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa due rette distinte che si intersecano in un punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, che non sia un punto all'infinito. (Suggerimento: costruire un riferimento opportuno utilizzando le informazioni date.) (2 punti)

Le risposte a tutti gli esercizi devono essere giustificate. Buon lavoro!

Spazio per la costruzione della risposta.