

A.A. 2019/2020

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale  
Algebra Lineare e Geometria

Prova scritta del 14-02-2020

**Primo esercizio.** (5 punti) Per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  l'applicazione lineare  $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rappresentata dalla seguente matrice  $A_k$ , è iniettiva? Per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  è suriettiva? Per  $k = 1$  trovare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di  $f_1$ .

$$A_k = \begin{pmatrix} k-1 & k-2 \\ k^2-1 & 2-k \\ 1-k & k-2 \end{pmatrix}.$$

**Secondo esercizio.** (10 punti) Trovare, se esiste, la forma canonica di Jordan  $J$  della seguente matrice  $A$ . In particolare trovare una base  $b$  di  $\mathbb{R}^4$  che dà il cambiamento di base  $[I]_b^b$  che permette di trovare la forma canonica di Jordan, dove  $e$  la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ . Dire a cosa è uguale  $[I]_b^e$  e calcolarla esplicitamente. Scrivere la formula che permette di ottenere  $J$  da  $A$ , tramite  $[I]_e^b$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Terzo esercizio.** (7 punti)

Al variare di  $k$  in  $\mathbb{R}$ , discutere il numero di soluzioni e risolvere il sistema lineare  $AX = B$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k^2-1 & k+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k+1 & -k-1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Quarto esercizio.** (4 punti)

a) Trovare il fascio  $\mathcal{F}$  di piani ortogonali alla retta

$$l = \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda, \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Dire qual è la posizione reciproca e qual è la distanza tra  $r$  e la retta  $l$  di equazione

$$l = \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 6\lambda, \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**Quinto esercizio.** (4 punti)

a) Al variare di  $h \in \mathbb{R}$  classificare la seguente conica

$$\mathcal{C}_h : 9x^2 + 2y^2 + 8hxy - 4x = 0.$$

b) Per  $h = 3$  trovare centro e assi se è una conica a centro oppure asse e vertice se è una parabola.