Università della Calabria

Corso di Laurea in Fisica A.A. 2015-2016

Esercitazioni di Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n.3

3.1. Dire se i seguenti vettori di V sono linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti. Inoltre dire se generano V.

1) $(1,2,3,4); (1,-1,5,7); (-1,4,-7,-10); (1,0,0,1)$ in $\mathbb{R}^4$;

2) $(1,-1,1,-1,1); (-1,1,-1,1,1)$ in $\mathbb{R}^5$;

3) 1;2; 3 in $\mathbb{R}$;

4) $1; i$ in $\mathbb{C}$.

3.2. Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \mathrm{Span}\{(1,-1,0,1),(3,2,1,0)\}$$
$$W_2 = \mathrm{Span}(1,0,0,0),(2,3,1,-1),(1,0,1,0),(3,3,-1,-1)\}$$

Calcolare una base e la dimensione di W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$. Dire se $W_1 + W_2$ è una somma diretta.

3.3. Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$W_2 : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Calcolare una base e la dimensione di W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$. Dire se $W_1 + W_2$ è una somma diretta.

3.4. Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori $v_1 = (h-1, 2h)$ e $v_2 = (1-h, 2)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$.

3.5. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ tale che $W = \text{Span}\{(1, 0, 2, 1), (2, 2, -2, 3)\}$. Dire per quale valore di $k \in R$, il vettore $v_k = (k + 1, k, 0, 2k)$ appartiene a W.

3.6. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ definito da $W : x - 3y + z = 0$. Dire per quale valore di $k \in R$, il vettore $v_k = (k - 1, -k, 2k)$ appartiene a W_1.

3.7. In $\mathbb{R}^3$ dire quali dei seguenti sottinsiemi è un sottospazio vettoriale

1) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - 2z = 0\}$;

2) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - y^2 = 0\}$;

3) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = -3\}$;

4) $W_4 = \{(x, x^2, 0) | x \in \mathbb{R}\}$.

3.8. In $\mathbb{C}^2$ dire quali dei seguenti sottinsiemi è un sottospazio vettoriale

1) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | x = y\}$;

2) $W_2 = \{(0, a + ib) | a, b \in \mathbb{R}\}$;

2) $W_2 = \{(0, a + ib) | a, b \in \mathbb{R}, a - b = 1\}$;

2) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | x - y = 1\}$.

3.9. Una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ si dice *antisimmetrica* se $A^t = -A$.

1) Se $A = \{a_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, quale relazione esiste tra $a_{i,j}$ e $a_{j,i}$, per $i, j \in \{1, ..., n\}$?

2) In particolare, cosa si può dire su $a_{i,i}$, $i \in \{1, .., n\}$?

3) Dimostrare che l'insieme delle matrici simmetriche è un sottospazio vettoriale di $M_{n \times n}(\mathbb{K})$.

3.10. Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dire quali dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}[x]$ sono sottospazi vettoriali

1) $W_1 = \{a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x | a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$;

2) $W_1 = \{a_n x^n + ... + a_2 x^2 + 2x - 2 | a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$.