Numeri complessi

Laura Paladino

Università della Calabria

Laurea Triennale in Chimica

Matematica - Parte B

I numeri complessi sono numeri della forma $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, dove $i^2 = 1$.

Quindi il numero complesso $x + iy$ è individuato dalla coppia (x, y) di numeri reali.

L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$. Quindi

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = 1\}.$$

Se abbiamo un numero complesso $x + iy$, allora il numero reale x viene detto *parte reale* e il numero reale y viene detto *parte immaginaria*.

I numeri complessi sono numeri della forma $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, dove $i^2 = 1$.

Quindi il numero complesso $x + iy$ è individuato dalla coppia (x, y) di numeri reali.

L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$. Quindi

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = 1\}.$$

Se abbiamo un numero complesso $x + iy$, allora il numero reale x viene detto *parte reale* e il numero reale y viene detto *parte immaginaria*.

I numeri complessi sono numeri della forma $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, dove $i^2 = 1$.

Quindi il numero complesso $x + iy$ è individuato dalla coppia (x, y) di numeri reali.

L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$. Quindi

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = 1\}.$$

Se abbiamo un numero complesso $x + iy$, allora il numero reale x viene detto *parte reale* e il numero reale y viene detto *parte immaginaria*.

I numeri complessi sono numeri della forma $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, dove $i^2 = 1$.

Quindi il numero complesso $x + iy$ è individuato dalla coppia (x, y) di numeri reali.

L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$. Quindi

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = 1\}.$$

Se abbiamo un numero complesso $x + iy$, allora il numero reale x viene detto *parte reale* e il numero reale y viene detto *parte immaginaria*.

Due numeri complessi sono uguali se hanno stessa parte reale e stessa parte immaginaria.

Quando $y = 0$, allora $x + iy = x$ è in particolare un numero reale, quindi $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Se $x = 0$, allora $x + iy = iy$ è detto *puramente immaginario*.

Due numeri complessi sono uguali se hanno stessa parte reale e stessa parte immaginaria.

Quando $y = 0$, allora $x + iy = x$ è in particolare un numero reale, quindi $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Se $x = 0$, allora $x + iy = iy$ è detto *puramente immaginario*.

Due numeri complessi sono uguali se hanno stessa parte reale e stessa parte immaginaria.

Quando $y = 0$, allora $x + iy = x$ è in particolare un numero reale, quindi $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Se $x = 0$, allora $x + iy = iy$ è detto *puramente immaginario*.

Le operazioni con i numeri complessi nella forma $x + iy$ si fanno come comuni operazioni di calcolo letterale, ricordando che $i^2 = 1$.

Esempi.

- $(1 + 2i) + (4 - i) = 1 + 4 + (2 - 1)i = 5 + i$;
- $2 \cdot 3 = 6$;
- $i \cdot -i = -i^2 = 1$;
- $2(3 + 5i) = 6 + 10i$;
- $(1 + 2i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 =$
  $3 + (-2 + 6)i - 4(-1) = 3 + 4 + 4i = 7 + 4i$;
- $(1 - 3i)^2 = 1 + 3^2 i^2 - 2 \cdot 3i = 1 - 9 - 6i = -8 - 6i$;
- $(1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 3^2 i^2 = 1 + 9 = 10$.

Le operazioni con i numeri complessi nella forma $x + iy$ si fanno come comuni operazioni di calcolo letterale, ricordando che $i^2 = 1$.

Esempi.

- $(1 + 2i) + (4 - i) = 1 + 4 + (2 - 1)i = 5 + i$;
- $2 \cdot 3 = 6$;
- $i \cdot -i = -i^2 = 1$;
- $2(3 + 5i) = 6 + 10i$;
- $(1 + 2i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 =$
  $3 + (-2 + 6)i - 4(-1) = 3 + 4 + 4i = 7 + 4i$;
- $(1 - 3i)^2 = 1 + 3^2 i^2 - 2 \cdot 3i = 1 - 9 - 6i = -8 - 6i$;
- $(1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 3^2 i^2 = 1 + 9 = 10$.

Le operazioni con i numeri complessi nella forma $x + iy$ si fanno come comuni operazioni di calcolo letterale, ricordando che $i^2 = 1$.

Esempi.

- $(1 + 2i) + (4 - i) = 1 + 4 + (2 - 1)i = 5 + i$;
- $2 \cdot 3 = 6$;
- $i \cdot -i = -i^2 = 1$;
- $2(3 + 5i) = 6 + 10i$;
- $(1 + 2i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 = 3 + (-2 + 6)i - 4(-1) = 3 + 4 + 4i = 7 + 4i$;
- $(1 - 3i)^2 = 1 + 3^2 i^2 - 2 \cdot 3i = 1 - 9 - 6i = -8 - 6i$;
- $(1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 3^2 i^2 = 1 + 9 = 10$.

Le operazioni con i numeri complessi nella forma $x + iy$ si fanno come comuni operazioni di calcolo letterale, ricordando che $i^2 = 1$.

Esempi.

- $(1 + 2i) + (4 - i) = 1 + 4 + (2 - 1)i = 5 + i$;
- $2 \cdot 3 = 6$;
- $i \cdot -i = -i^2 = 1$;
- $2(3 + 5i) = 6 + 10i$;
- $(1 + 2i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 =$ $3 + (-2 + 6)i - 4(-1) = 3 + 4 + 4i = 7 + 4i$;
- $(1 - 3i)^2 = 1 + 3^2 i^2 - 2 \cdot 3i = 1 - 9 - 6i = -8 - 6i$;
- $(1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 3^2 i^2 = 1 + 9 = 10$.

Le operazioni con i numeri complessi nella forma $x + iy$ si fanno come comuni operazioni di calcolo letterale, ricordando che $i^2 = 1$.

Esempi.

- $(1 + 2i) + (4 - i) = 1 + 4 + (2 - 1)i = 5 + i$;
- $2 \cdot 3 = 6$;
- $i \cdot -i = -i^2 = 1$;
- $2(3 + 5i) = 6 + 10i$;
- $(1 + 2i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 = 3 + (-2 + 6)i - 4(-1) = 3 + 4 + 4i = 7 + 4i$;
- $(1 - 3i)^2 = 1 + 3^2 i^2 - 2 \cdot 3i = 1 - 9 - 6i = -8 - 6i$;
- $(1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 3^2 i^2 = 1 + 9 = 10$.

Le operazioni con i numeri complessi nella forma $x + iy$ si fanno come comuni operazioni di calcolo letterale, ricordando che $i^2 = 1$.

Esempi.

- $(1 + 2i) + (4 - i) = 1 + 4 + (2 - 1)i = 5 + i$;
- $2 \cdot 3 = 6$;
- $i \cdot -i = -i^2 = 1$;
- $2(3 + 5i) = 6 + 10i$;
- $(1 + 2i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 =$ $3 + (-2 + 6)i - 4(-1) = 3 + 4 + 4i = 7 + 4i$;
- $(1 - 3i)^2 = 1 + 3^2 i^2 - 2 \cdot 3i = 1 - 9 - 6i = -8 - 6i$;
- $(1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 3^2 i^2 = 1 + 9 = 10$.

Le operazioni con i numeri complessi nella forma $x + iy$ si fanno come comuni operazioni di calcolo letterale, ricordando che $i^2 = 1$.

Esempi.

- $(1 + 2i) + (4 - i) = 1 + 4 + (2 - 1)i = 5 + i$;
- $2 \cdot 3 = 6$;
- $i \cdot -i = -i^2 = 1$;
- $2(3 + 5i) = 6 + 10i$;
- $(1 + 2i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 =$ $3 + (-2 + 6)i - 4(-1) = 3 + 4 + 4i = 7 + 4i$;
- $(1 - 3i)^2 = 1 + 3^2 i^2 - 2 \cdot 3i = 1 - 9 - 6i = -8 - 6i$;
- $(1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 3^2 i^2 = 1 + 9 = 10$.

Le operazioni con i numeri complessi nella forma $x + iy$ si fanno come comuni operazioni di calcolo letterale, ricordando che $i^2 = 1$.

Esempi.

- $(1 + 2i) + (4 - i) = 1 + 4 + (2 - 1)i = 5 + i$;
- $2 \cdot 3 = 6$;
- $i \cdot -i = -i^2 = 1$;
- $2(3 + 5i) = 6 + 10i$;
- $(1 + 2i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 =$ $3 + (-2 + 6)i - 4(-1) = 3 + 4 + 4i = 7 + 4i$;
- $(1 - 3i)^2 = 1 + 3^2 i^2 - 2 \cdot 3i = 1 - 9 - 6i = -8 - 6i$;
- $(1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 3^2 i^2 = 1 + 9 = 10.$

Le operazioni con i numeri complessi nella forma $x + iy$ si fanno come comuni operazioni di calcolo letterale, ricordando che $i^2 = 1$.

Esempi.

- $(1 + 2i) + (4 - i) = 1 + 4 + (2 - 1)i = 5 + i$;
- $2 \cdot 3 = 6$;
- $i \cdot -i = -i^2 = 1$;
- $2(3 + 5i) = 6 + 10i$;
- $(1 + 2i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 =$ $3 + (-2 + 6)i - 4(-1) = 3 + 4 + 4i = 7 + 4i$;
- $(1 - 3i)^2 = 1 + 3^2 i^2 - 2 \cdot 3i = 1 - 9 - 6i = -8 - 6i$;
- $(1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 3^2 i^2 = 1 + 9 = 10$.

Definizione.

Dato un numero complesso $w = x + iy$, si definisce suo *coniugato* e si indica come $\overline{w} = \overline{x + iy}$ il numero complesso $x - iy$, che ha la stessa parte reale di w e parte immaginaria opposta.

Esempi.

- $\overline{2} = 2$;
- $\overline{i} = -i$;
- $\overline{1 - 3i} = 1 + 3i$.

Definizione.

Dato un numero complesso $w = x + iy$, si definisce suo *coniugato* e si indica come $\overline{w} = \overline{x + iy}$ il numero complesso $x - iy$, che ha la stessa parte reale di w e parte immaginaria opposta.

Esempi.

- $\overline{2} = 2$;
- $\overline{i} = -i$;
- $\overline{1 - 3i} = 1 + 3i$.

Osserviamo che moltiplicando un numero complesso per il suo coniugato, otteniamo un numero reale

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 + i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Quindi per scrivere il quoziente di due numeri complessi $\frac{a+ib}{c+id}$ nella forma $x+iy$, basta moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore.

Esempio.

$$\frac{2+3i}{2-4i} = \frac{(2+3i)(2+4i)}{(2+4i)(2-4i))} = \frac{4+8i+6i-12}{4+16} = \frac{-8+14i}{20}$$
$$= -\frac{2}{5} + \frac{7}{10}i.$$

Osserviamo che moltiplicando un numero complesso per il suo coniugato, otteniamo un numero reale

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 + i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Quindi per scrivere il quoziente di due numeri complessi $\frac{a+ib}{c+id}$ nella forma $x+iy$, basta moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore.

Esempio.

$$\frac{2+3i}{2-4i} = \frac{(2+3i)(2+4i)}{(2+4i)(2-4i))} = \frac{4+8i+6i-12}{4+16} = \frac{-8+14i}{20}$$
$$= -\frac{2}{5} + \frac{7}{10}i.$$

Osserviamo che moltiplicando un numero complesso per il suo coniugato, otteniamo un numero reale

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 + i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Quindi per scrivere il quoziente di due numeri complessi $\frac{a+ib}{c+id}$ nella forma $x+iy$, basta moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore.

Esempio.

$$\frac{2+3i}{2-4i} = \frac{(2+3i)(2+4i)}{(2+4i)(2-4i))} = \frac{4+8i+6i-12}{4+16} = \frac{-8+14i}{20}$$
$$= -\frac{2}{5} + \frac{7}{10}i.$$

Definizione.

Dato un numero complesso $w = x + iy$, si definisce suo *inverso* e si indica come w^{-1} il numero complesso $a + ib$, tale che $(x + iy)(a + ib) = 1$.

Esempi.

- Se $w = 2$, allora $w^{-1} = \frac{1}{2}$, poiché $2\frac{1}{2} = 1$.
- Se $w = i$, allora $w^{-1} = -i$, poiché $i(-i) = -i^2 = 1$.
- Se $w = 1 + 2i$, allora dobbiamo cercare un numero complesso $a + ib$ tale che $(1 + 2i)(a + ib) = 1$. Osserviamo che $(1 + 2i)(a + ib) = a + ib + 2ai - 2b = a - 2b + (b + 2a)i$. Quindi abbiamo $a - 2b + (b + 2a)i = 1$ se e solo se

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ b + 2a = 0 \end{cases}$$

Definizione.

Dato un numero complesso $w = x + iy$, si definisce suo *inverso* e si indica come w^{-1} il numero complesso $a + ib$, tale che $(x + iy)(a + ib) = 1$.

Esempi.

- Se $w = 2$, allora $w^{-1} = \frac{1}{2}$, poiché $2\frac{1}{2} = 1$.
- Se $w = i$, allora $w^{-1} = -i$, poiché $i(-i) = -i^2 = 1$.
- Se $w = 1 + 2i$, allora dobbiamo cercare un numero complesso $a + ib$ tale che $(1 + 2i)(a + ib) = 1$. Osserviamo che
  $(1 + 2i)(a + ib) = a + ib + 2ai - 2b = a - 2b + (b + 2a)i$.
  Quindi abbiamo $a - 2b + (b + 2a)i = 1$ se e solo se

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ b + 2a = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzione

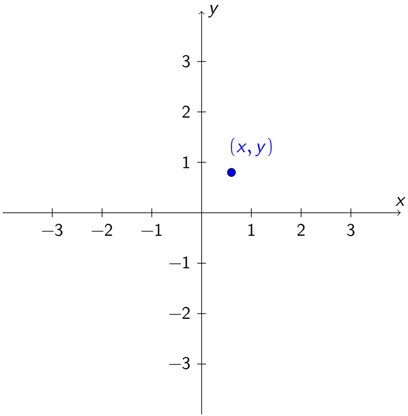
$$\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Quindi $w^{-1} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. Infatti

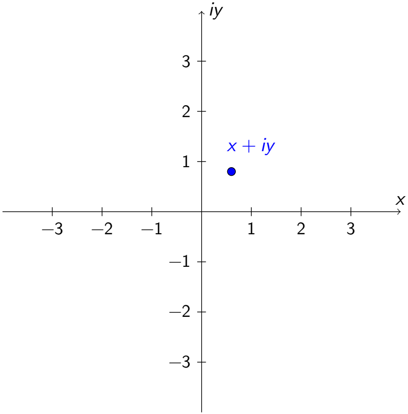
$$(1+2i)(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i) = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i + \frac{2}{5}i + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

Piano di Argand-Gauss e forma polare

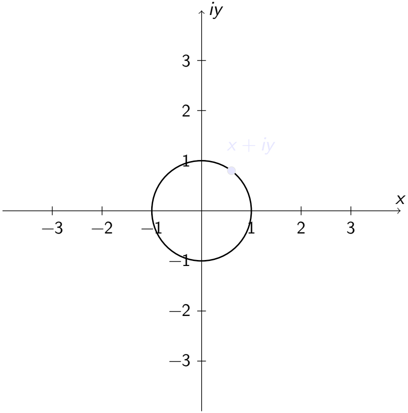
Il piano cartesiano rappresenta le coppie di numeri reali (x, y).



Analogamente il piano di Argand-Gauss rappresenta tutti i numeri complessi $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. In questo caso al posto dell'asse y abbiamo l'asse iy. Il numero $x + iy$ è rappresentato dalla coppia (x, y), analogamente a come si fa nel piano cartesiano.

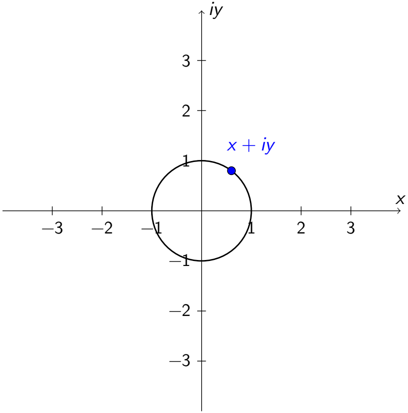


Consideriamo la circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$



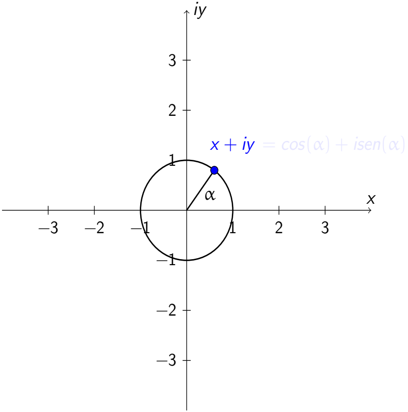
e consideriamo un punto (x, y) su tale circonferenza.

Consideriamo la circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$



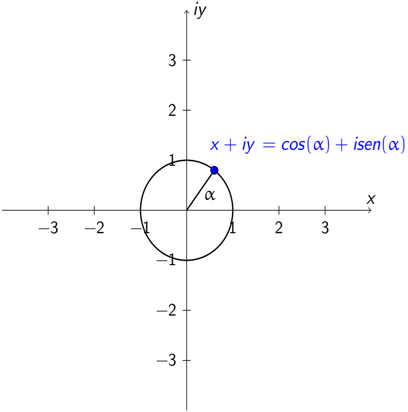
e consideriamo un punto (x, y) su tale circonferenza.

Per definizione di seno e coseno dell'angolo α individuato dalla retta passante per $(0, 0)$ e per (x, y), abbiamo $x = \cos(\alpha)$ e $y = \sin(\alpha)$.



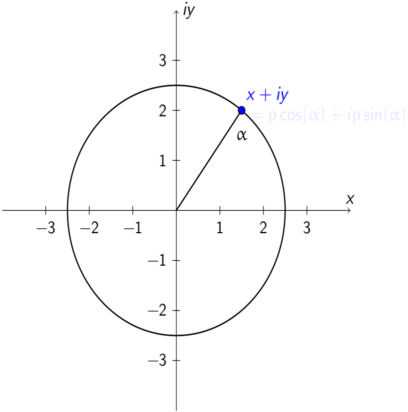
Quindi il punto $x + iy$ può essere anche indicato come $\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$.

Per definizione di seno e coseno dell'angolo α individuato dalla retta passante per $(0,0)$ e per (x,y), abbiamo $x = \cos(\alpha)$ e $y = \sin(\alpha)$.



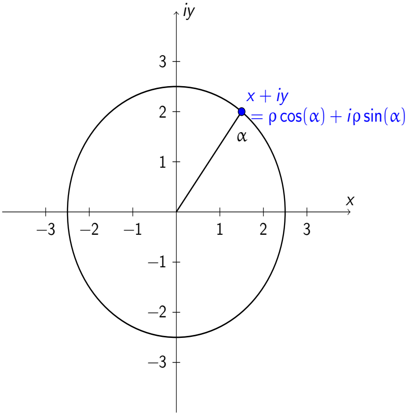
Quindi il punto $x + iy$ può essere anche indicato come $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.

Se invece abbiamo un punto (x, y) sulla circonferenza $x^2 + y^2 = \rho^2$ di raggio ρ e centro $(0, 0)$, che individua lo stesso angolo α, allora $x = \rho\cos\alpha$, $y = \rho\sin\alpha$. Infatti $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\alpha + \rho^2\sin^2\alpha = \rho^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \rho^2$.



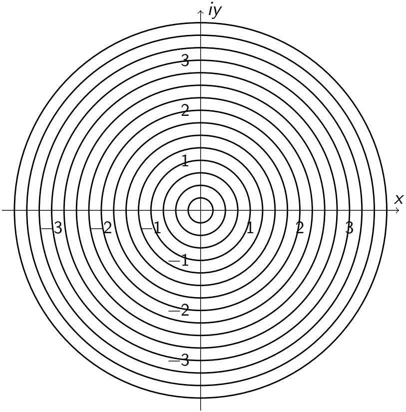
In questo caso $x + iy = \rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha)$.

Se invece abbiamo un punto (x, y) sulla circonferenza $x^2 + y^2 = \rho^2$ di raggio ρ e centro $(0, 0)$, che individua lo stesso angolo α, allora $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \sin \alpha$. Infatti $x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \alpha + \rho^2 \sin^2 \alpha = \rho^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \rho^2$.



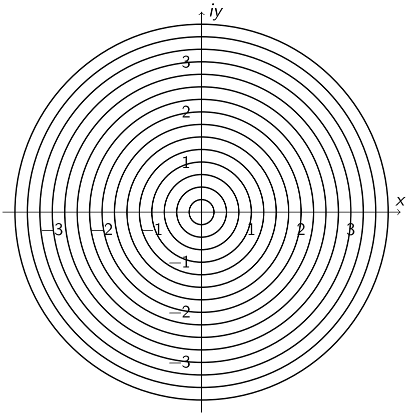
In questo caso $x + iy = \rho \cos(\alpha) + i \rho \sin(\alpha)$.

Osserviamo che al variare di ρ in $\mathbb{R}_{>0}$, le circonferenze $x^2 + y^2 = \rho^2$ "ricoprono" tutto il piano di Argand-Gauss



Quindi al variare di ρ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ e di α in $[0, 2\pi]$, l'espressione $\rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha)$ ci descrive tutti i punti del piano di Argand-Gauss e quindi ci descrive tutti i numeri complessi $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che al variare di ρ in $\mathbb{R}_{>0}$, le circonferenze $x^2 + y^2 = \rho^2$ "ricoprono" tutto il piano di Argand-Gauss



Quindi al variare di ρ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ e di α in $[0, 2\pi]$, l'espressione $\rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha)$ ci descrive tutti i punti del piano di Argand-Gauss e quindi ci descrive tutti i numeri complessi $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Forma esponenziale

Utilizzando la posizione $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, possiamo scrivere

$$\rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}.$$

Esempi.

- $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^0$;
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$;
- $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Sia nella forma esponenziale, sia nella forma polare ρ viene detto *modulo* del numero complesso e α viene detto *argomento* del numero complesso.

Due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e se i loro argomenti variano per multipli di 2π (ricordiamo che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π).

Utilizzando la posizione $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, possiamo scrivere

$$\rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}.$$

Esempi.

- $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^0$;
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$;
- $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Sia nella forma esponenziale, sia nella forma polare ρ viene detto *modulo* del numero complesso e α viene detto *argomento* del numero complesso.

Due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e se i loro argomenti variano per multipli di 2π (ricordiamo che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π).

Utilizzando la posizione $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, possiamo scrivere

$$\rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}.$$

Esempi.

- $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^0$;
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$;
- $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Sia nella forma esponenziale, sia nella forma polare ρ viene detto *modulo* del numero complesso e α viene detto *argomento* del numero complesso.

Due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e se i loro argomenti variano per multipli di 2π (ricordiamo che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π).

Utilizzando la posizione $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, possiamo scrivere

$$\rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}.$$

Esempi.

- $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^0$;
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$;
- $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Sia nella forma esponenziale, sia nella forma polare ρ viene detto *modulo* del numero complesso e α viene detto *argomento* del numero complesso.

Due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e se i loro argomenti variano per multipli di 2π (ricordiamo che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π).

Utilizzando la posizione $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, possiamo scrivere

$$\rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}.$$

Esempi.

- $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^0$;
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$;
- $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Sia nella forma esponenziale, sia nella forma polare ρ viene detto *modulo* del numero complesso e α viene detto *argomento* del numero complesso.

Due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e se i loro argomenti variano per multipli di 2π (ricordiamo che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π).

Utilizzando la posizione $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, possiamo scrivere

$$\rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}.$$

Esempi.

- $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^0$;
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$;
- $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Sia nella forma esponenziale, sia nella forma polare ρ viene detto *modulo* del numero complesso e α viene detto *argomento* del numero complesso.

Due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e se i loro argomenti variano per multipli di 2π (ricordiamo che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π).

Utilizzando la posizione $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, possiamo scrivere

$$\rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}.$$

Esempi.

- $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^0$;
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$;
- $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Sia nella forma esponenziale, sia nella forma polare ρ viene detto *modulo* del numero complesso e α viene detto *argomento* del numero complesso.

Due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e se i loro argomenti variano per multipli di 2π (ricordiamo che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π).

La forma polare risulta molto utile per moltiplicare, dividere, elevare a potenza numeri complessi e farne le radici, utilizzando le proprietà delle potenze.

Esempi.

- $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$;
- $(2e^{\pi i})^2 = 4e^{2\pi i}$;
- $e^{\frac{\pi}{2}i}/e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})i} = e^{\frac{\pi}{6}i}$;
- $\sqrt{e^{\frac{\pi}{4}i}} = (e^{\frac{\pi}{4}i})^{\frac{1}{2}}$
  dividiamo per due l'angolo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ che rappresenta il numero complesso $e^{\frac{\pi}{4}i}$. Otteniamo $\frac{\pi}{8} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di $k \in \mathbb{Z}$ otteniamo solo due angoli nell'intervallo $[0, 2\pi]$, rispettivamente $\frac{\pi}{8}$ (ottenuto per $k = 0$) e $\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ (ottenuto per $k = 1$). Quindi le radici quadrate di $e^{\frac{\pi}{4}i}$ sono i numeri complessi $w_1 = e^{\frac{\pi}{8}i}$ e $w_2 = e^{\frac{9}{8}\pi i}$.

La forma polare risulta molto utile per moltiplicare, dividere, elevare a potenza numeri complessi e farne le radici, utilizzando le proprietà delle potenze.

Esempi.

- $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$;
- $(2e^{\pi i})^2 = 4e^{2\pi i}$;
- $e^{\frac{\pi}{2}i}/e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})i} = e^{\frac{\pi}{6}i}$;
- $\sqrt{e^{\frac{\pi}{4}i}} = (e^{\frac{\pi}{4}i})^{\frac{1}{2}}$
  dividiamo per due l'angolo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ che rappresenta il numero complesso $e^{\frac{\pi}{4}i}$. Otteniamo $\frac{\pi}{8} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di $k \in \mathbb{Z}$ otteniamo solo due angoli nell'intervallo $[0, 2\pi]$, rispettivamente $\frac{\pi}{8}$ (ottenuto per $k = 0$) e $\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ (ottenuto per $k = 1$). Quindi le radici quadrate di $e^{\frac{\pi}{4}i}$ sono i numeri complessi $w_1 = e^{\frac{\pi}{8}i}$ e $w_2 = e^{\frac{9}{8}\pi i}$.

La forma polare risulta molto utile per moltiplicare, dividere, elevare a potenza numeri complessi e farne le radici, utilizzando le proprietà delle potenze.

Esempi.

- $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$;
- $(2e^{\pi i})^2 = 4e^{2\pi i}$;
- $e^{\frac{\pi}{2}i}/e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})i} = e^{\frac{\pi}{6}i}$;
- $\sqrt{e^{\frac{\pi}{4}i}} = (e^{\frac{\pi}{4}i})^{\frac{1}{2}}$
  dividiamo per due l'angolo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ che rappresenta il numero complesso $e^{\frac{\pi}{4}i}$. Otteniamo $\frac{\pi}{8} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di $k \in \mathbb{Z}$ otteniamo solo due angoli nell'intervallo $[0, 2\pi]$, rispettivamente $\frac{\pi}{8}$ (ottenuto per $k = 0$) e $\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ (ottenuto per $k = 1$). Quindi le radici quadrate di $e^{\frac{\pi}{4}i}$ sono i numeri complessi $w_1 = e^{\frac{\pi}{8}i}$ e $w_2 = e^{\frac{9}{8}\pi i}$.

La forma polare risulta molto utile per moltiplicare, dividere, elevare a potenza numeri complessi e farne le radici, utilizzando le proprietà delle potenze.

Esempi.

- $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$;
- $(2e^{\pi i})^2 = 4e^{2\pi i}$;
- $e^{\frac{\pi}{2}i}/e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})i} = e^{\frac{\pi}{6}i}$;
- $\sqrt{e^{\frac{\pi}{4}i}} = (e^{\frac{\pi}{4}i})^{\frac{1}{2}}$
  dividiamo per due l'angolo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ che rappresenta il numero complesso $e^{\frac{\pi}{4}i}$. Otteniamo $\frac{\pi}{8} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di $k \in \mathbb{Z}$ otteniamo solo due angoli nell'intervallo $[0, 2\pi]$, rispettivamente $\frac{\pi}{8}$ (ottenuto per $k = 0$) e $\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ (ottenuto per $k = 1$). Quindi le radici quadrate di $e^{\frac{\pi}{4}i}$ sono i numeri complessi $w_1 = e^{\frac{\pi}{8}i}$ e $w_2 = e^{\frac{9}{8}\pi i}$.

La forma polare risulta molto utile per moltiplicare, dividere, elevare a potenza numeri complessi e farne le radici, utilizzando le proprietà delle potenze.

Esempi.

- $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$;
- $(2e^{\pi i})^2 = 4e^{2\pi i}$;
- $e^{\frac{\pi}{2}i}/e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})i} = e^{\frac{\pi}{6}i}$;
- $\sqrt{e^{\frac{\pi}{4}i}} = (e^{\frac{\pi}{4}i})^{\frac{1}{2}}$
  dividiamo per due l'angolo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ che rappresenta il numero complesso $e^{\frac{\pi}{4}i}$. Otteniamo $\frac{\pi}{8} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di $k \in \mathbb{Z}$ otteniamo solo due angoli nell'intervallo $[0, 2\pi]$, rispettivamente $\frac{\pi}{8}$ (ottenuto per $k = 0$) e $\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ (ottenuto per $k = 1$). Quindi le radici quadrate di $e^{\frac{\pi}{4}i}$ sono i numeri complessi $w_1 = e^{\frac{\pi}{8}i}$ e $w_2 = e^{\frac{9}{8}\pi i}$.

La forma polare risulta molto utile per moltiplicare, dividere, elevare a potenza numeri complessi e farne le radici, utilizzando le proprietà delle potenze.

Esempi.

- $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$;
- $(2e^{\pi i})^2 = 4e^{2\pi i}$;
- $e^{\frac{\pi}{2}i}/e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})i} = e^{\frac{\pi}{6}i}$;
- $\sqrt{e^{\frac{\pi}{4}i}} = (e^{\frac{\pi}{4}i})^{\frac{1}{2}}$
  dividiamo per due l'angolo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ che rappresenta il numero complesso $e^{\frac{\pi}{4}i}$. Otteniamo $\frac{\pi}{8} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di $k \in \mathbb{Z}$ otteniamo solo due angoli nell'intervallo $[0, 2\pi]$, rispettivamente $\frac{\pi}{8}$ (ottenuto per $k = 0$) e $\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ (ottenuto per $k = 1$). Quindi le radici quadrate di $e^{\frac{\pi}{4}i}$ sono i numeri complessi $w_1 = e^{\frac{\pi}{8}i}$ e $w_2 = e^{\frac{9}{8}\pi i}$.

La forma polare risulta molto utile anche per calcolare il coniugato e l'inverso di un numero complesso.

Consideriamo il numero complesso $w = \rho e^{i\alpha}$.

Per calcolare il suo coniugato dobbiamo trovare un numero complesso che abbia la stessa parte reale e parte immaginaria opposta.

Osserviamo che $\rho e^{i\alpha} = \rho \cos\alpha + \rho i \sin\alpha$. Quindi $\overline{w} = \rho\cos\alpha - \rho i \sin\alpha$.

Poiché dalla trigonometria sappiamo che $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, allora

$$\overline{w} = \rho\cos\alpha - \rho i \sin\alpha = \rho\cos(-\alpha) + \rho i \sin(-\alpha) = \rho e^{-i\alpha}.$$

La forma polare risulta molto utile anche per calcolare il coniugato e l'inverso di un numero complesso.

Consideriamo il numero complesso $w = \rho e^{i\alpha}$.

Per calcolare il suo coniugato dobbiamo trovare un numero complesso che abbia la stessa parte reale e parte immaginaria opposta.

Osserviamo che $\rho e^{i\alpha} = \rho\cos\alpha + \rho i \sin\alpha$. Quindi $\overline{w} = \rho\cos\alpha - \rho i \sin\alpha$.

Poiché dalla trigonometria sappiamo che $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, allora

$$\overline{w} = \rho\cos\alpha - \rho i \sin\alpha = \rho\cos(-\alpha) + \rho i \sin(-\alpha) = \rho e^{-i\alpha}.$$

La forma polare risulta molto utile anche per calcolare il coniugato e l'inverso di un numero complesso.

Consideriamo il numero complesso $w = \rho e^{i\alpha}$.

Per calcolare il suo coniugato dobbiamo trovare un numero complesso che abbia la stessa parte reale e parte immaginaria opposta.

Osserviamo che $\rho e^{i\alpha} = \rho \cos \alpha + \rho i \sin \alpha$. Quindi $\overline{w} = \rho \cos \alpha - \rho i \sin \alpha$.

Poiché dalla trigonometria sappiamo che $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ e $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, allora

$$\overline{w} = \rho \cos \alpha - \rho i \sin \alpha = \rho \cos(-\alpha) + \rho i \sin(-\alpha) = \rho e^{-i\alpha}.$$

La forma polare risulta molto utile anche per calcolare il coniugato e l'inverso di un numero complesso.

Consideriamo il numero complesso $w = \rho e^{i\alpha}$.

Per calcolare il suo coniugato dobbiamo trovare un numero complesso che abbia la stessa parte reale e parte immaginaria opposta.

Osserviamo che $\rho e^{i\alpha} = \rho \cos\alpha + \rho i \sin\alpha$. Quindi $\overline{w} = \rho \cos\alpha - \rho i \sin\alpha$.

Poiché dalla trigonometria sappiamo che $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, allora

$$\overline{w} = \rho \cos\alpha - \rho i \sin\alpha = \rho \cos(-\alpha) + \rho i \sin(-\alpha) = \rho e^{-i\alpha}.$$

La forma polare risulta molto utile anche per calcolare il coniugato e l'inverso di un numero complesso.

Consideriamo il numero complesso $w = \rho e^{i\alpha}$.

Per calcolare il suo coniugato dobbiamo trovare un numero complesso che abbia la stessa parte reale e parte immaginaria opposta.

Osserviamo che $\rho e^{i\alpha} = \rho \cos\alpha + \rho i \sin\alpha$. Quindi $\overline{w} = \rho\cos\alpha - \rho i \sin\alpha$.

Poiché dalla trigonometria sappiamo che $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, allora

$$\overline{w} = \rho\cos\alpha - \rho i \sin\alpha = \rho\cos(-\alpha) + \rho i \sin(-\alpha) = \rho e^{-i\alpha}.$$

Per calcolare il suo inverso dobbiamo trovare un numero complesso $\lambda e^{i\theta}$ tale che $\rho e^{i\alpha}\lambda e^{i\theta} = \rho\lambda e^{(\alpha+\theta)i} = 1$.

Questo succede se e solo se

$$\begin{cases} \rho \cdot \lambda = 1 \\ \alpha + \theta = 0 \end{cases}$$

Infatti $e^0 = 1$.

Dal sistema otteniamo $\lambda = \rho^{-1} = \frac{1}{\rho}$ (ricordiamo che $\rho > 0$) e $\theta = -\alpha$. Quindi $w^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-\alpha i}$.

Esempi.

- $w = e^{\frac{\pi}{2} i}$, $\overline{w} = w^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2} i}$;
- $w = 2e^{\frac{\pi}{3} i}$, $\overline{w} = 2e^{-\frac{\pi}{3} i}$, $w^{-1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{3} i}$.

Per calcolare il suo inverso dobbiamo trovare un numero complesso $\lambda e^{i\theta}$ tale che $\rho e^{i\alpha}\lambda e^{i\theta} = \rho\lambda e^{(\alpha+\theta)i} = 1$.

Questo succede se e solo se

$$\begin{cases} \rho \cdot \lambda = 1 \\ \alpha + \theta = 0 \end{cases}$$

Infatti $e^0 = 1$.

Dal sistema otteniamo $\lambda = \rho^{-1} = \frac{1}{\rho}$ (ricordiamo che $\rho > 0$) e $\theta = -\alpha$. Quindi $w^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-\alpha i}$.

Esempi.

- $w = e^{\frac{\pi}{2} i}$, $\overline{w} = w^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2} i}$;
- $w = 2e^{\frac{\pi}{3} i}$, $\overline{w} = 2e^{-\frac{\pi}{3} i}$, $w^{-1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{3} i}$.

Per calcolare il suo inverso dobbiamo trovare un numero complesso $\lambda e^{i\theta}$ tale che $\rho e^{i\alpha}\lambda e^{i\theta} = \rho\lambda e^{(\alpha+\theta)i} = 1$.

Questo succede se e solo se

$$\begin{cases} \rho \cdot \lambda = 1 \\ \alpha + \theta = 0 \end{cases}$$

Infatti $e^0 = 1$.

Dal sistema otteniamo $\lambda = \rho^{-1} = \frac{1}{\rho}$ (ricordiamo che $\rho > 0$) e $\theta = -\alpha$. Quindi $w^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-\alpha i}$.

Esempi.

- $w = e^{\frac{\pi}{2} i}$, $\overline{w} = w^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2} i}$;
- $w = 2e^{\frac{\pi}{3} i}$, $\overline{w} = 2e^{-\frac{\pi}{3} i}$, $w^{-1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{3} i}$.

Per calcolare il suo inverso dobbiamo trovare un numero complesso $\lambda e^{i\theta}$ tale che $\rho e^{i\alpha}\lambda e^{i\theta} = \rho\lambda e^{(\alpha+\theta)i} = 1$.

Questo succede se e solo se

$$\begin{cases} \rho \cdot \lambda = 1 \\ \alpha + \theta = 0 \end{cases}$$

Infatti $e^0 = 1$.

Dal sistema otteniamo $\lambda = \rho^{-1} = \frac{1}{\rho}$ (ricordiamo che $\rho > 0$) e $\theta = -\alpha$. Quindi $w^{-1} = \frac{1}{\rho}e^{-\alpha i}$.

Esempi.

- $w = e^{\frac{\pi}{2}i}$, $\overline{w} = w^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$;
- $w = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $\overline{w} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$, $w^{-1} = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

Per calcolare il suo inverso dobbiamo trovare un numero complesso $\lambda e^{i\theta}$ tale che $\rho e^{i\alpha}\lambda e^{i\theta} = \rho\lambda e^{(\alpha+\theta)i} = 1$.

Questo succede se e solo se

$$\begin{cases} \rho \cdot \lambda = 1 \\ \alpha + \theta = 0 \end{cases}$$

Infatti $e^0 = 1$.

Dal sistema otteniamo $\lambda = \rho^{-1} = \frac{1}{\rho}$ (ricordiamo che $\rho > 0$) e $\theta = -\alpha$. Quindi $w^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-\alpha i}$.

Esempi.

- $w = e^{\frac{\pi}{2} i}$, $\overline{w} = w^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2} i}$;
- $w = 2e^{\frac{\pi}{3} i}$, $\overline{w} = 2e^{-\frac{\pi}{3} i}$, $w^{-1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{3} i}$.

Per calcolare il suo inverso dobbiamo trovare un numero complesso $\lambda e^{i\theta}$ tale che $\rho e^{i\alpha}\lambda e^{i\theta} = \rho\lambda e^{(\alpha+\theta)i} = 1$.

Questo succede se e solo se

$$\begin{cases} \rho \cdot \lambda = 1 \\ \alpha + \theta = 0 \end{cases}$$

Infatti $e^0 = 1$.

Dal sistema otteniamo $\lambda = \rho^{-1} = \frac{1}{\rho}$ (ricordiamo che $\rho > 0$) e $\theta = -\alpha$. Quindi $w^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-\alpha i}$.

Esempi.

- $w = e^{\frac{\pi}{2} i}$, $\overline{w} = w^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2} i}$;
- $w = 2e^{\frac{\pi}{3} i}$, $\overline{w} = 2e^{-\frac{\pi}{3} i}$, $w^{-1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{3} i}$.

Teorema fondamentale dell'algebra e risoluzione di equazioni

Teorema fondamentale dell'algebra.

Un polinomio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, con $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ di grado n, ammette n radici in $\mathbb{C}$ (contate con molteplicità).

In particolare un'equazione di grado n definita sui numeri complessi ammette n soluzioni in $\mathbb{C}$.

Teorema fondamentale dell'algebra.

Un polinomio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, con $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ di grado n, ammette n radici in $\mathbb{C}$ (contate con molteplicità).

In particolare un'equazione di grado n definita sui numeri complessi ammette n soluzioni in $\mathbb{C}$.

Esercizio. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$.

$$w^7 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}w^2.$$

Soluzione. Il teorema fondamentale dell'algebra ci assicura che ci sono 7 soluzioni dell'equazione, contate con molteplicità.

Abbiamo $w^6 + 5e^{\frac{2}{3}\pi i}w^2 = w^2(w^5 - 5e^{\frac{2}{3}\pi i}) = 0$. Quindi le prime due soluzioni sono $w_1 = w_2 = 0$.

Le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale sono le soluzioni del'equazione

$$w^5 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}. \qquad (*)$$

Un numero complesso $\rho e^{\alpha i}$ soddisfa l'equazione (*) se e solo se $(\rho e^{\alpha i})^5 = \rho^5 e^{5\alpha i} = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

Esercizio. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$.

$$w^7 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}w^2.$$

Soluzione. Il teorema fondamentale dell'algebra ci assicura che ci sono 7 soluzioni dell'equazione, contate con molteplicità.

Abbiamo $w^6 + 5e^{\frac{2}{3}\pi i}w^2 = w^2(w^5 - 5e^{\frac{2}{3}\pi i}) = 0$. Quindi le prime due soluzioni sono $w_1 = w_2 = 0$.

Le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale sono le soluzioni del'equazione

$$w^5 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}. \quad (*)$$

Un numero complesso $\rho e^{\alpha i}$ soddisfa l'equazione (*) se e solo se $(\rho e^{\alpha i})^5 = \rho^5 e^{5\alpha i} = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

Esercizio. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$.

$$w^7 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i} w^2.$$

Soluzione. Il teorema fondamentale dell'algebra ci assicura che ci sono 7 soluzioni dell'equazione, contate con molteplicità.

Abbiamo $w^6 + 5e^{\frac{2}{3}\pi i} w^2 = w^2(w^5 - 5e^{\frac{2}{3}\pi i}) = 0$. Quindi le prime due soluzioni sono $w_1 = w_2 = 0$.

Le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale sono le soluzioni del'equazione

$$w^5 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}. \qquad (*)$$

Un numero complesso $\rho e^{\alpha i}$ soddisfa l'equazione (*) se e solo se $(\rho e^{\alpha i})^5 = \rho^5 e^{5\alpha i} = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

Esercizio. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$.

$$w^7 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i} w^2.$$

Soluzione. Il teorema fondamentale dell'algebra ci assicura che ci sono 7 soluzioni dell'equazione, contate con molteplicità.

Abbiamo $w^6 + 5e^{\frac{2}{3}\pi i} w^2 = w^2(w^5 - 5e^{\frac{2}{3}\pi i}) = 0$. Quindi le prime due soluzioni sono $w_1 = w_2 = 0$.

Le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale sono le soluzioni del'equazione

$$w^5 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}. \qquad (*)$$

Un numero complesso $\rho e^{\alpha i}$ soddisfa l'equazione (*) se e solo se $(\rho e^{\alpha i})^5 = \rho^5 e^{5\alpha i} = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

Esercizio. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$.

$$w^7 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i} w^2.$$

Soluzione. Il teorema fondamentale dell'algebra ci assicura che ci sono 7 soluzioni dell'equazione, contate con molteplicità.

Abbiamo $w^6 + 5e^{\frac{2}{3}\pi i} w^2 = w^2(w^5 - 5e^{\frac{2}{3}\pi i}) = 0$. Quindi le prime due soluzioni sono $w_1 = w_2 = 0$.

Le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale sono le soluzioni del'equazione

$$w^5 = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}. \qquad (*)$$

Un numero complesso $\rho e^{\alpha i}$ soddisfa l'equazione (*) se e solo se $(\rho e^{\alpha i})^5 = \rho^5 e^{5\alpha i} = -5e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

In particolare

$$\begin{cases} \rho^5 = -5 \\ 5\alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Osserviamo che $-1 = i^5$. Quindi $\rho^5 = i^5 5$ implica $\rho = i\sqrt[5]{5}$.

Abbiamo poi $\alpha = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di k in $\mathbb{Z}$ troviamo le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale.

- per $k = 0$, abbiamo $\alpha_1 = \frac{2}{15}\pi$, da cui $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_1 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i}$;
- per $k = 1$, abbiamo $\alpha_2 = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{15}\pi$, da cui $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_2 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i}$;
- per $k = 2$, abbiamo $\alpha_3 = \frac{2}{15}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{14}{15}\pi$, da cui $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_3 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i}$;

In particolare

$$\begin{cases} \rho^5 = -5 \\ 5\alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Osserviamo che $-1 = i^5$. Quindi $\rho^5 = i^5 5$ implica $\rho = i\sqrt[5]{5}$.

Abbiamo poi $\alpha = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di k in $\mathbb{Z}$ troviamo le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale.

- per $k = 0$, abbiamo $\alpha_1 = \frac{2}{15}\pi$, da cui $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_1 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i}$;
- per $k = 1$, abbiamo $\alpha_2 = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{15}\pi$, da cui $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_2 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i}$;
- per $k = 2$, abbiamo $\alpha_3 = \frac{2}{15}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{14}{15}\pi$, da cui $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_3 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i}$;

In particolare

$$\begin{cases} \rho^5 = -5 \\ 5\alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Osserviamo che $-1 = i^5$. Quindi $\rho^5 = i^5 5$ implica $\rho = i\sqrt[5]{5}$.

Abbiamo poi $\alpha = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di k in $\mathbb{Z}$ troviamo le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale.

- per $k = 0$, abbiamo $\alpha_1 = \frac{2}{15}\pi$, da cui $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_1 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i}$;
- per $k = 1$, abbiamo $\alpha_2 = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{15}\pi$, da cui $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_2 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i}$;
- per $k = 2$, abbiamo $\alpha_3 = \frac{2}{15}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{14}{15}\pi$, da cui $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_3 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i}$;

In particolare

$$\begin{cases} \rho^5 = -5 \\ 5\alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Osserviamo che $-1 = i^5$. Quindi $\rho^5 = i^5 5$ implica $\rho = i\sqrt[5]{5}$.

Abbiamo poi $\alpha = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di k in $\mathbb{Z}$ troviamo le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale.

- per $k = 0$, abbiamo $\alpha_1 = \frac{2}{15}\pi$, da cui $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_1 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i}$;
- per $k = 1$, abbiamo $\alpha_2 = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{15}\pi$, da cui $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_2 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i}$;
- per $k = 2$, abbiamo $\alpha_3 = \frac{2}{15}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{14}{15}\pi$, da cui $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_3 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i}$;

In particolare

$$\begin{cases} \rho^5 = -5 \\ 5\alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Osserviamo che $-1 = i^5$. Quindi $\rho^5 = i^5 5$ implica $\rho = i\sqrt[5]{5}$.

Abbiamo poi $\alpha = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di k in $\mathbb{Z}$ troviamo le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale.

- per $k = 0$, abbiamo $\alpha_1 = \frac{2}{15}\pi$, da cui $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_1 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i}$;
- per $k = 1$, abbiamo $\alpha_2 = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{15}\pi$, da cui $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_2 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i}$;
- per $k = 2$, abbiamo $\alpha_3 = \frac{2}{15}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{14}{15}\pi$, da cui $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_3 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i}$;

In particolare

$$\begin{cases} \rho^5 = -5 \\ 5\alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Osserviamo che $-1 = i^5$. Quindi $\rho^5 = i^5 5$ implica $\rho = i\sqrt[5]{5}$.

Abbiamo poi $\alpha = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di k in $\mathbb{Z}$ troviamo le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale.

- per $k = 0$, abbiamo $\alpha_1 = \frac{2}{15}\pi$, da cui $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_1 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i}$;
- per $k = 1$, abbiamo $\alpha_2 = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{15}\pi$, da cui $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_2 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i}$;
- per $k = 2$, abbiamo $\alpha_3 = \frac{2}{15}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{14}{15}\pi$, da cui $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_3 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i}$;

In particolare

$$\begin{cases} \rho^5 = -5 \\ 5\alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Osserviamo che $-1 = i^5$. Quindi $\rho^5 = i^5 5$ implica $\rho = i\sqrt[5]{5}$.

Abbiamo poi $\alpha = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Al variare di k in $\mathbb{Z}$ troviamo le altre 5 soluzioni dell'equazione iniziale.

- per $k = 0$, abbiamo $\alpha_1 = \frac{2}{15}\pi$, da cui $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_1 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i}$;
- per $k = 1$, abbiamo $\alpha_2 = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{15}\pi$, da cui $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_2 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i}$;
- per $k = 2$, abbiamo $\alpha_3 = \frac{2}{15}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{14}{15}\pi$, da cui $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_3 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i}$;

- per $k = 3$, abbiamo $\alpha_4 = \frac{2}{15}\pi + \frac{6}{5}\pi = \frac{20}{15}\pi = \frac{4}{3}\pi$, da cui $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_4 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{4}{3}\pi i}$;
- per $k = 4$, abbiamo $\alpha_5 = \frac{2}{15}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{26}{15}\pi$, da cui $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_5 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{26}{15}\pi i}$.

Possiamo decidere di lasciare così queste soluzioni oppure di scrivere i come $e^{\frac{\pi}{2}}$. Poiché il modulo di un numero complesso è un numero reale maggiore di zero, sarebbe meglio fare in questa seconda maniera.

- $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{19}{30}\pi i}$;
- $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{31}{30}\pi i}$;
- $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{43}{30}\pi i}$;
- $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{11}{6}\pi i}$;
- $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{67}{30}\pi i}$.

- per $k = 3$, abbiamo $\alpha_4 = \frac{2}{15}\pi + \frac{6}{5}\pi = \frac{20}{15}\pi = \frac{4}{3}\pi$, da cui $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_4 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{4}{3}\pi i}$;
- per $k = 4$, abbiamo $\alpha_5 = \frac{2}{15}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{26}{15}\pi$, da cui $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_5 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{26}{15}\pi i}$.

Possiamo decidere di lasciare così queste soluzioni oppure di scrivere i come $e^{\frac{\pi}{2}}$. Poiché il modulo di un numero complesso è un numero reale maggiore di zero, sarebbe meglio fare in questa seconda maniera.

- $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{19}{30}\pi i}$;
- $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{31}{30}\pi i}$;
- $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{43}{30}\pi i}$;
- $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{11}{6}\pi i}$;
- $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{67}{30}\pi i}$.

- per $k = 3$, abbiamo $\alpha_4 = \frac{2}{15}\pi + \frac{6}{5}\pi = \frac{20}{15}\pi = \frac{4}{3}\pi$, da cui $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_4 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{4}{3}\pi i}$;
- per $k = 4$, abbiamo $\alpha_5 = \frac{2}{15}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{26}{15}\pi$, da cui $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_5 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{26}{15}\pi i}$.

Possiamo decidere di lasciare così queste soluzioni oppure di scrivere i come $e^{\frac{\pi}{2}}$. Poiché il modulo di un numero complesso è un numero reale maggiore di zero, sarebbe meglio fare in questa seconda maniera.

- $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{19}{30}\pi i}$;
- $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{31}{30}\pi i}$;
- $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{43}{30}\pi i}$;
- $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{11}{6}\pi i}$;
- $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{67}{30}\pi i}$.

- per $k = 3$, abbiamo $\alpha_4 = \frac{2}{15}\pi + \frac{6}{5}\pi = \frac{20}{15}\pi = \frac{4}{3}\pi$, da cui $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_4 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{4}{3}\pi i}$;
- per $k = 4$, abbiamo $\alpha_5 = \frac{2}{15}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{26}{15}\pi$, da cui $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_5 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{26}{15}\pi i}$.

Possiamo decidere di lasciare così queste soluzioni oppure di scrivere i come $e^{\frac{\pi}{2}}$. Poiché il modulo di un numero complesso è un numero reale maggiore di zero, sarebbe meglio fare in questa seconda maniera.

- $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{19}{30}\pi i}$;
- $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{31}{30}\pi i}$;
- $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{43}{30}\pi i}$;
- $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{11}{6}\pi i}$;
- $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{67}{30}\pi i}$.

- per $k = 3$, abbiamo $\alpha_4 = \frac{2}{15}\pi + \frac{6}{5}\pi = \frac{20}{15}\pi = \frac{4}{3}\pi$, da cui $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_4 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{4}{3}\pi i}$;
- per $k = 4$, abbiamo $\alpha_5 = \frac{2}{15}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{26}{15}\pi$, da cui $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_5 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{26}{15}\pi i}$.

Possiamo decidere di lasciare così queste soluzioni oppure di scrivere i come $e^{\frac{\pi}{2}}$. Poiché il modulo di un numero complesso è un numero reale maggiore di zero, sarebbe meglio fare in questa seconda maniera.

- $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{19}{30}\pi i}$;
- $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{31}{30}\pi i}$;
- $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{43}{30}\pi i}$;
- $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{11}{6}\pi i}$;
- $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{67}{30}\pi i}$.

- per $k = 3$, abbiamo $\alpha_4 = \frac{2}{15}\pi + \frac{6}{5}\pi = \frac{20}{15}\pi = \frac{4}{3}\pi$, da cui $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_4 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{4}{3}\pi i}$;
- per $k = 4$, abbiamo $\alpha_5 = \frac{2}{15}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{26}{15}\pi$, da cui $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_5 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{26}{15}\pi i}$.

Possiamo decidere di lasciare così queste soluzioni oppure di scrivere i come $e^{\frac{\pi}{2}}$. Poiché il modulo di un numero complesso è un numero reale maggiore di zero, sarebbe meglio fare in questa seconda maniera.

- $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{19}{30}\pi i}$;
- $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{31}{30}\pi i}$;
- $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{43}{30}\pi i}$;
- $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{11}{6}\pi i}$;
- $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{67}{30}\pi i}$.

- per $k=3$, abbiamo $\alpha_4 = \frac{2}{15}\pi + \frac{6}{5}\pi = \frac{20}{15}\pi = \frac{4}{3}\pi$, da cui $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_4 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{4}{3}\pi i}$;
- per $k=4$, abbiamo $\alpha_5 = \frac{2}{15}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{26}{15}\pi$, da cui $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_5 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{26}{15}\pi i}$.

Possiamo decidere di lasciare così queste soluzioni oppure di scrivere i come $e^{\frac{\pi}{2}}$. Poiché il modulo di un numero complesso è un numero reale maggiore di zero, sarebbe meglio fare in questa seconda maniera.

- $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{19}{30}\pi i}$;
- $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{31}{30}\pi i}$;
- $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{43}{30}\pi i}$;
- $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{11}{6}\pi i}$;
- $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{67}{30}\pi i}$.

- per $k = 3$, abbiamo $\alpha_4 = \frac{2}{15}\pi + \frac{6}{5}\pi = \frac{20}{15}\pi = \frac{4}{3}\pi$, da cui $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_4 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{4}{3}\pi i}$;
- per $k = 4$, abbiamo $\alpha_5 = \frac{2}{15}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{26}{15}\pi$, da cui $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\alpha_5 i} = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{26}{15}\pi i}$.

Possiamo decidere di lasciare così queste soluzioni oppure di scrivere i come $e^{\frac{\pi}{2}}$. Poiché il modulo di un numero complesso è un numero reale maggiore di zero, sarebbe meglio fare in questa seconda maniera.

- $w_3 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{19}{30}\pi i}$;
- $w_4 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{8}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{31}{30}\pi i}$;
- $w_5 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{43}{30}\pi i}$;
- $w_6 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{11}{6}\pi i}$;
- $w_7 = i\sqrt[5]{5}e^{\frac{14}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{\pi}{2}+\frac{26}{15}\pi i} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{67}{30}\pi i}$.

Ricapitolando le 7 soluzioni dell'equazione data sono:

- $w_1 = 0$;
- $w_2 = 0$;
- $w_3 = \sqrt[5]{5}e^{\frac{19}{30}\pi i}$;
- $w_4 = \sqrt[5]{5}e^{\frac{31}{30}\pi i}$;
- $w_5 = \sqrt[5]{5}e^{\frac{43}{30}\pi i}$;
- $w_6 = \sqrt[5]{5}e^{\frac{11}{6}\pi i}$;
- $w_7 = \sqrt[5]{5}e^{\frac{67}{30}\pi i}$.