

Università della Calabria  
Corso di Laurea in Matematica  
A.A. 2013-2014

Programma del corso di  
*Geometria Proiettiva, Curve e Superfici*

L. Paladino

**Spazi affini.** Spazi e sottospazi affini. Operazioni con i sottospazi affini e formula di Grassmann. Descrizione di uno spazio affine tramite un sistema lineare.

**Spazi proiettivi.** Note storiche e costruzione di Desargues. Definizione di uno spazio proiettivo come quoziente di uno spazio vettoriale. Definizione di uno spazio proiettivo come quoziente di una sfera in uno spazio euclideo o hilbertiano. Omeomorfismo tra i quozienti ottenuti utilizzando le due diverse definizioni. Dipendenza e indipendenza lineare. Punti in posizione generale, riferimenti proiettivi e basi normalizzate. Sottospazi proiettivi. Sistemi lineari associati ad un sottospazio proiettivo. Rette, piani e iperpiani nello spazio proiettivo. Operazioni con i sottospazi proiettivi. Formula di Grassmann e sua applicazione al caso delle rette in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ .

**Proiettività.** Definizione di proiettività. Isomorfismi tra spazi proiettivi. Definizione del gruppo proiettivo  $\text{PGL}_n(\mathbb{K})$ . Descrizione del gruppo  $\text{PGL}_n(\mathbb{K})$  come quoziente di  $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ . Azioni di gruppi. Orbite e stabilizzatori. Azioni fedeli. Azioni di gruppi su spazi topologici. Azione di  $\text{PGL}_n(\mathbb{K})$  su  $\mathbb{P}^n(V)$  e azione di  $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$  su  $\mathbb{P}^n(V)$ . Sistemi di coordinate. Punti fissi. Teorema fondamentale delle proiettività. Teorema fondamentale dei riferimenti. Cambiamenti di riferimento. Matrici associate a cambiamenti di riferimento. Matrici associate a proiettività rispetto a un riferimento dato.

**Immersione di uno spazio affine in uno spazio proiettivo.** Descrizione delle immersioni canoniche e degli iperpiani ad esse associati. Omeomorfismo tra un tale iperpiano e  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ . Punti impropri.

**Curve e superfici.** Definizione di ipersuperficie (affine e proiettiva). Equazione e supporto. Varietà affini e proiettive. Omogeneizzazione di polinomi; come passare da una varietà affine a una proiettiva e viceversa. Punti singolari. Definizione dell'iperpiano tangente ad un'ipersuperficie in un punto. Definizione di curva algebrica in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ . Risultante di due polinomi e sue proprietà. Teorema di Bézout in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Versione del teorema di Bézout in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

**Coniche e quadriche.** Forme bilineari. Vettori isotropi e somma diretta di sottospazi vettoriali. Matrici congruenti. Matrici simmetriche e loro diagonalizzazione. Diagonalizzazione di matrici simmetriche su campi algebricamente chiusi. Teorema di Sylvester. Definizioni di conica (affine e proiettiva). Definizione di quadrica (affine e proiettiva). Classificazione delle coniche affini in  $\mathbb{R}^2$  e in  $\mathbb{C}^2$  e delle coniche proiettive in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Classificazione delle quadriche affini in  $\mathbb{R}^3$  e in  $\mathbb{C}^3$  e delle quadriche proiettive in  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  e in  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Come disegnare una quadrica in  $\mathbb{R}^3$ .

**Spazi proiettivi duali.** Spazi proiettivi duali e sottospazi proiettivi duali. Corrispondenza di dualità. Principio di dualità. Proposizioni autoduali.

**Geometria proiettiva in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ .** Applicazione del principio di dualità alla dimostrazione del teorema di Desargues. Teorema di Pappo.

### **Testi consigliati.**

- [1 ] SERNESI E., *Geometria I*, Bollati Boringhieri, 1989.
- [2 ] BELTRAMETTI M. C. ET AL., *Lezioni di geometria analitica a proiettiva*, Bollati Boringhieri, 2001.
- [3 ] FORTUNA E., FRIGERIO R., PARDINI R., *Geometria proiettiva. Problemi risolti e richiami di teoria*, Springer-Verlag, 2011.