

Relazione sull'attività Scientifica e Didattica svolta
da
Luigi Montoro
Periodo dal 1-12-2011 al 1-12-2014

- **Dati Personali**

Luogo e Data di Nascita: 28 Giugno 1981, Cariatì (CS), Italia.

Residenza: Via Povarella 4A, 87046 Montalto Uffugo (CS), Italia.

Cellulare: (+39) 339 5407249.

Ufficio: Dipartimento di Matematica, Università della Calabria

Ponte Pietro Bucci, 31 B

87036 Arcavacata di Rende, Cosenza, Italia.

Phone: (+39) 0984 496454.

Fax: (+39) 0984 496410.

Indirizzi E-mail: montoro@mat.unical.it

- **Posizione Attuale**

Da Dicembre 2011: Ricercatore Universitario - Settore Scientifico Disciplinare: MAT/05

- Analisi Matematica.

- **Titoli**

Luglio, 2000: Maturità Scientifica, Liceo Scientifico 'Stefano Patrizi', Cariatì (CS). Voto 100/100.

Novembre, 2003: Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica, Università della Calabria, Campus di Arcavacata, Italia. Voto 110/110 con lode.

Luglio, 2005: Laurea Specialistica in Ingegneria Energetica, Università della Calabria, Campus di Arcavacata, Italia. Voto 110/110 con lode e *nota di merito* da parte della commissione.

Ottobre 2005: Vincitore con borsa, *Dottorato in Matematica ed Informatica*, Dipartimento di Matematica, Università della Calabria.

Da Novembre 2005 a Ottobre 2008: Iscritto al *Programma di Dottorato in Matematica ed Informatica* presso il Dipartimento di Matematica, Università della Calabria.

Ottobre 2007: Vincitore borsa del premio 'Giovani Ricercatori' (indetto con D.R. N. 1599/07), Università della Calabria, per un periodo di studio, come dottorando visitatore, da Gennaio a Febbraio 2008 presso la SISSA, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste, Italia.

Febbraio 2008: Vincitore borsa 'Tirocini di Ricerca' (in attuazione del Programma Integrato di Voucher e Borse per l'Alta Formazione POR CALABRIA 2000-2006 - Misura 3.7), per una posizione di dottorando visitatore nell'anno 2007 - 2008 presso l'Università Autonoma di Madrid, Spagna.

Febbraio, 2009: Dottorato in Matematica ed Informatica, Università della Calabria, Campus di Arcavacata, Italia. Tesi: Concentration and asymptotic behavior of solutions for some singularly perturbed mixed problems. Relatori: Annamaria CANINO & Irene PERAL.

Febbraio 2009: Vincitore di Assegno di Ricerca di durata biennale (indetto con DR N. 3772 DEL 18/12/2008), Dipartimento di Matematica, Università della Calabria.

Da Febbraio 2009 a Gennaio 2010: Assegnista di Ricerca (SSD MAT/05), Dipartimento di Matematica, Università della Calabria. Direttore della ricerca: Annamaria CANINO.

Gennaio 2010: Vincitore Borsa di durata annuale 'Estancias de profesores e investigadores extranjeros en centros españoles - Plan Nacional de Investigación Científica', SB2009-0033, MEC, Dipartimento di Matematica, Università Autonoma di Madrid, Spagna.

Da Febbraio 2010 a Gennaio 2011: Posizione di Post-Doc, Università Autonoma di Madrid. Direttore della ricerca: Irene PERAL.

Da Febbraio 2011 a Novembre 2011: Assegnista di Ricerca (SSD MAT/05), Dipartimento di Matematica, Università della Calabria. Direttore della ricerca: Annamaria CANINO.

Luglio 2011: Vincitore Assegno di Ricerca di durata triennale (indetto con con DR. N. 2718 del 27/18/2010), POR FSE2007/2013, Dipartimento di Matematica, Università della Calabria.

- **Gruppi di Appartenenza**

GNAMPA, Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni.

National Research Group *Metodi variazionali e topologici nello studio di fenomeni non lineari*, PRIN 2005, PRIN 2007.

Proyecto *Estudio de problemas no lineales relacionados con fenómenos de difusión, crecimiento y propagación*, MTM2010-18128, MICINN, Spagna.

- **Soggiorni presso altre Istituzioni Scientifiche nel periodo dal 1-12-2011 al 1-12-2014**

Variational and Geometric Methods in PDE's, Ancona, 18 - 21 Aprile 2012.

New perspectives in nonlinear PDE's, Roma, 24 - 28 Settembre 2012.

Variational and Topological Methods in Nonlinear Phenomena, Alghero, 24 - 28 Giugno 2013.

Workshop on nonlinear equations, University Carlos III de Madrid, Madrid, 17 - 18 Ottobre 2013.

Partial Differential Equations and Geometric Measure Theory, Corso C.I.M.E., Cetraro, 2 - 7 Giugno 2014.

Méthodes géométriques et variationnelles pour des EDPs non-linéaires, Lyon, 1 - 5 Settembre 2014.

- **Seminari nel periodo dal 1-12-2011 al 1-12-2014**

Qualitative properties of positive solutions of some quasilinear elliptic equations in half spaces, Dipartimento di Matematica, Università Autonoma di Madrid, 23 Febbraio 2012.

Qualitative properties of positive solutions of some quasilinear elliptic equations in half spaces Dipartimento di Matematica, Università Carlos III de Madrid, 29 Ottobre 2013.

- **Attività Didattica nel periodo dal 1-12-2011 al 1-12-2014**

Esercitatore del corso di **Modellistica per Problemi Differenziali**, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, Facoltà di Ingegneria, Università della Calabria, A.A. 2011 - 2012.

Titolare dei corsi di **Analisi Matematica 1 - II modulo** (corsi C e E), Corso di Laurea in Ingegneria Ambientale, Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Ingegneria Elettronica, Facoltà di Ingegneria, Università della Calabria, A.A. 2011 - 2012.

Titolare dei corsi di **Analisi Matematica 1 - I modulo** (corsi D e E), Corso di Laurea in Ingegneria (moduli comuni), Facoltà di Ingegneria, Università della Calabria, A.A. 2012 - 2013.

Titolare del corso di **Modellistica per Problemi Differenziali**, Laurea in Ingegneria Meccanica, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica e Gestionale, Università della Calabria, A.A. 2012 - 2013.

Titolare del corso di **Didattica della Matematica con elementi di laboratorio**, S.S.D. Mat/01-Mat/08, classe A049, Corsi del Tirocinio Formativo Attivo, A.A. 2012 - 2013.

Ho tenuto il corso **Qualitative properties of solutions of nonlinear elliptic equations**, Posgrado de Excelencia Internacional en Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Ottobre 2013.

Titolare del corso di **Analisi Matematica 1 - II modulo** (Corso A), Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Dipartimento di Ingegneria Civile, Università della Calabria, A.A. 2013 - 2014.

Titolare del corso di **Analisi Matematica 1 - II modulo** (Corso B), Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Dipartimento di Ingegneria Civile, Università della Calabria, A.A. 2013 - 2014.

Titolare del corso di **Analisi Matematica 1 - II modulo**, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica e Gestionale, Università della Calabria, A.A. 2013 - 2014.

Titolare del corso di **Modellistica per Problemi Differenziali**, Laurea in Ingegneria Meccanica, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica e Gestionale, Università della Calabria, A.A. 2013 - 2014.

Titolare del corso di **Didattica della Matematica con elementi di laboratorio**, S.S.D. Mat/01-Mat/08, classe A049, Percorsi Abilitanti Speciali, A.A. 2013 - 2014.

Titolare del corso di **Analisi Matematica 1 - I modulo**, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica e Gestionale, Università della Calabria, A.A. 2014 - 2015.

• **Attività di Ricerca nel periodo dal 1-12-2011 al 1-12-2014**

L'attività di ricerca si è svolta prevalentemente nell'ambito dei metodi variazionali in analisi non lineare ed in particolare nel campo delle equazioni a derivate parziali.

I problemi affrontati sono stati:

A. Problemi Differenziali Singolarmente Perturbati. ([2])

Il lavoro [2] è un *survey* sui risultati riguardanti il problema affrontato negli anni del Dottorato di Ricerca. In particolare si è affrontato lo studio dell'esistenza di soluzioni del seguente problema perturbato con condizioni miste:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p & \text{in } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial_{\mathcal{N}}\Omega; & u = 0 \text{ on } \partial_{\mathcal{D}}\Omega; \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (\tilde{P}_\varepsilon)$$

dove Ω è un dominio regolare contenuto in \mathbb{R}^n , $p \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right)$, ε è un parametro positivo sufficientemente piccolo e $\partial_{\mathcal{N}}\Omega$, $\partial_{\mathcal{D}}\Omega$ sono due sottoinsiemi della frontiera di Ω tale che l'unione delle loro chiusure coincide con l'intero bordo. Nello stesso lavoro [2], viene riportata inoltre una approfondita analisi su alcuni risultati numerici ottenuti sul problema (\tilde{P}_ε) , con particolare riferimento all'implementazione dell'algoritmo utilizzato e alla costruzione e scrittura dello stesso.

B. Equazioni di Tipo Fully-Nonlinear. (lavoro [1])

In [1] si considera lo studio della monotonia delle soluzioni positive di viscosità del problema

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = f(u), & \text{in } D \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \\ u(x, 0) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

con $F : \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente ellittico e f localmente lipschitziana con $f(0) \geq 0$. Il risultato è ottenuto senza nessuna assunzione sulla limitatezza della soluzione u o del gradiente $|\nabla u|$. Più precisamente si considera $F : \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni di struttura:

(F1) *Uniforme ellitticità*: Esistono costanti $0 < \theta \leq \Theta$ tali che $\forall X, Y \in S^2$ con $Y \geq 0$,

$$-\Theta \text{traccia}(Y) \leq F(\xi, X + Y) - F(\xi, X) \leq -\theta \text{traccia}(Y),$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^2$.

(F2) *Omogeneità*: $F(t\xi, tX) = t \cdot F(\xi, X)$ per ogni $t > 0$. Inoltre assumiamo $F(0, 0) = 0$.

(F3) *Condizione di struttura*: Esiste $\gamma > 0$ tale che per ogni $X, Y \in S^2$ e $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2$, si ha,

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X - Y) - \gamma |\xi_1 - \xi_2| \leq F(\xi_1, X) - F(\xi_2, Y) \leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X - Y) + \gamma |\xi_1 - \xi_2|,$$

dove $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^\pm$ sono gli operatori estremali di Pucci, definiti come,

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X) = -\theta \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(X) - \Theta \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i(X),$$

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X) = -\Theta \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(X) - \theta \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i(X),$$

con $\lambda_i(X)$, $i = 1, \dots, n$, autovalori di X .

(F4) *Simmetria*: $F(\xi^t Q, Q^t X Q) = F(\xi, X)$ dove $Q \in O(n) = \{Q \in S^2 : Q \cdot Q^t = Id\}$.

In generale, molte tecniche usate in letteratura per trattare operatori semilineari o quasilineari, possono essere anche applicate al caso fully nonlinear, ma in ogni caso ciò richiederebbe che u o $|\nabla u|$ siano limitati. Tuttavia, già nel più semplice caso di $F(\nabla u, D^2 u) = \Delta u$, esistono soluzioni monotone illimitate u con gradiente $|\nabla u|$ anche illimitato, per esempio $u(x, y) = e^x y$ in \mathbb{R}^2 . Per risolvere il problema senza alcuna condizione di limitatezza sulla soluzione u e sul suo gradiente ∇u , si fa uso di alcune idee geometriche applicate al caso dell'operatore fully non linear, uniformemente

ellittico, presente nel problema (1), fornendo i necessari strumenti. La naturale nozione di soluzione in questo contesto, è quella di soluzione di viscosità. Le soluzioni di viscosità del problema (1), per le ipotesi (F1) – (F3), sono di classe $C^{1,\alpha}$, cioè, $u \in C^{1,\alpha}(\mathcal{K} \cap \overline{D})$ per ogni insieme compatto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$. La prova è basata sulla stima di Aleksandrov-Bakelman-Pucci. Il principale risultato ottenuto è il seguente:

Teorema 1 *Sia u una soluzione di viscosità (e quindi $C_{loc}^{1,\alpha}$) di (1) e F uniformemente ellittico che verifica (F1) – (F4). Si assuma f localmente Lipschitziana e $f(0) \geq 0$. Allora u è monotona nella direzione e_2 e inoltre*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{D}.$$

C. Equazioni di Tipo p-Laplaciano. (lavori [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])

Nei lavori [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] si considerano equazioni che coinvolgono operatori quasilineari ellittici. Un esempio di riferimento è l'operatore p-Laplaciano. Le principali difficoltà incontrate lavorando con problemi di questo tipo derivano dalla natura non-lineare e degenerare dell'operatore che causa ad esempio la mancanza di regolarità delle soluzioni. La regolarità ottimale delle soluzioni è infatti la regolarità $C^{1,\alpha}$ (vedi i lavori di DiBenedetto e Tolksdorf), e ogni soluzione va quindi intesa in senso debole.

Si studiano in particolare esistenza e proprietà qualitative delle soluzioni, con particolare interesse verso le proprietà di simmetria e monotonia delle soluzioni.

Per questo ultimo scopo si utilizza il metodo di spostamento di iperpiani paralleli ormai vastamente utilizzato a partire dal famoso lavoro di Gidas-Ni-Nirenberg. Il metodo di spostamento di iperpiani paralleli risale ad Alexandrov e fu reso noto alla comunità di studiosi di PDE da J. Serrin in un celebre lavoro sui problemi sovra-determinati. Nel nostro ambito in particolare è conveniente utilizzare una versione raffinata del metodo di spostamento di iperpiani paralleli di Berestycky-Nirenberg, la quale è completamente basata sul principio di confronto in domini piccoli. Nel caso

di operatori degeneri tali tecniche sono state generalizzate in alcuni primi lavori da Pucci-Serrin-Zou e da Damascelli-Pacella.

In [3] si considera la monotonia di soluzioni positive $C^{1,\alpha}$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(u), & \text{in } \mathbb{R}_+^N \\ u(x', y) > 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^N \\ u(x', 0) = 0, & \text{su } \partial \mathbb{R}_+^N \end{cases} \quad (2)$$

dove (x', y) denota un generico punto appartenente a \mathbb{R}_+^N con $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ e $y = x_N$.

Lo studio della monotonia delle soluzioni è stato considerato prima per il caso semi-lineare non degenerare in una serie di articoli di Berestycky-Caffarelli-Nirenberg e Dancer. La tecnica maggiormente utilizzata in questo tipo di argomenti è il metodo del *moving plane* di Alexandrov-Serrin. Una delle principali difficoltà che si incontra lavorando con operatori non lineari è dovuta al fatto che i principi di confronto non sono equivalenti ai principi di massimo, come per il caso semi-lineare. Inoltre quando si considera il caso del semi-spazio, l'applicazione del metodo del moving plane è più delicata dal momento che i principi di confronto debole in domini piccoli devono essere sostituiti da principi di confronto debole in domini stretti illimitati. Anche il principio di confronto forte non si applica in modo analogo al caso di domini limitati, vista la mancanza di compattezza. Nel caso semilineare molti degli argomenti presenti in letteratura sono relazionati alla natura lineare e non degenerare dell'operatore e questo fa sì che non sia possibile estendere in modo semplice questi argomenti al caso di equazioni che presentano operatori non lineari e degeneri.

Nel lavoro [3] si usa un diverso approccio basato su un nuovo principio di confronto debole che, per nostra conoscenza, è il primo in questa direzione:

Teorema 2 *Sia $N \geq 2$, $1 < p \leq 2$, $\lambda > 0$ e f localmente Lipschitziana. Sia*

$$\Sigma_{(\lambda, y_0)} := \left\{ \mathbb{R}^{N-1} \times \left[y_0 - \frac{\lambda}{2}, y_0 + \frac{\lambda}{2} \right] \right\}, \quad y_0 \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Si considerino $u, v \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Sigma_{(\lambda,y_0)})$ e $u, \nabla u, v, \nabla v \in L^\infty(\Sigma_{(\lambda,y_0)})$ tali che

$$\begin{cases} -\Delta_p u \leq f(u) & \text{in } \Sigma_{(\lambda,y_0)}, \\ -\Delta_p v \geq f(v) & \text{in } \Sigma_{(\lambda,y_0)}, \\ u \leq v & \text{su } \partial\Sigma_{(\lambda,y_0)}. \end{cases}$$

Allora esiste $\lambda_0 = \lambda_0(N, p, \|\nabla u\|_\infty, \|\nabla v\|_\infty, \|u\|_\infty, \|v\|_\infty, f) > 0$ tale che se $0 < \lambda < \lambda_0$, segue

$$u \leq v \quad \text{in } \Sigma_{(\lambda,y_0)}.$$

Questo risultato, insieme ad un argomento di traslazione, permette di applicare un principio di confronto forte ad un problema limite associato a (4). Dallo studio del problema limite nel semispazio, utilizzando anche proprietà sulle funzioni p-armoniche, si ottiene il principale risultato del lavoro [3]:

Teorema 3 Sia $u \in C_{loc}^{1,\alpha}$ una soluzione positiva di con $|\nabla u| \in L^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ e $\frac{2N+2}{N+2} < p \leq 2$. Si assume inoltre che la nonlinearity f sia localmente Lipschitziana e positiva, cioè $f(s) > 0$ per $s > 0$ con $f(0) \geq 0$. Allora u è monotona crescente rispetto alla direzione- x_n , e inoltre

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial y} > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^N.$$

Nello stesso lavoro si ottengono inoltre diversi risultati di tipo Liouville, riassunti nel seguente teorema:

Teorema 4 Sia $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{R}_+^N}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^N)$ una soluzione debole non negativa in \mathbb{R}_+^N , con $\frac{2N+2}{N+2} < p < 2$. Si assuma uno dei seguenti casi:

- $N = 3$ e $f(s) > 0$ per $s > 0$, con $f(0) = 0$.
- $N \geq 3$, $f(s) > 0$ per $s > 0$, $f(0) = 0$ e f sottocritica rispetto all'esponente critico di Sobolev in R^{N-1} , i.e.

$$(\alpha - 1)f(s) - sf'(s) \geq 0 \quad \text{for } s > 0, \quad 1 < \alpha < p^*(N - 1).$$

- $N \geq 3$ $f(s) > 0$ per $s > 0$, $f(0) = 0$ e $f(s) \geq \lambda s^{\frac{(N-1)(p-1)}{N-1-p}}$ in $[0, \delta]$, per qualche $\lambda, \delta > 0$.

Allora

$$u \equiv 0.$$

In [4] si prosegue lo studio delle proprietà di monotonia delle soluzioni $C^{1,\alpha}$ del problema (4). Si continua l'analisi provando un principio di confronto debole in domini illimitati tipo strisce, sotto una delle seguenti condizioni

- (f_1) La non linearità f è localmente Lipschitziana e, dato $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^+$, esiste $a = a(\mathcal{M}) \in \mathbb{R}^+$ e $A = A(\mathcal{M}) \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$a s^q \leq f(s) \leq A s^q \quad \text{and} \quad |f'(s)| \leq A s^{q-1} \quad \text{q.o. in } [0, \mathcal{M}]$$

per qualche $q \geq p - 1$.

- (f_2) La non linearità f *positiva* e localmente Lipschitziana. Di conseguenza dato $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^+$, sia $\gamma = \gamma(\mathcal{M}) \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$f(s) \geq \gamma \quad \text{in } [0, \mathcal{M}].$$

Vale il seguente

Teorema 5 Siano $u, v \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Sigma_{(\lambda,\beta)})$ con $u, \nabla u, v, \nabla v \in L^\infty(\Sigma_{(\lambda,\beta)})$, dove

$$\Sigma_{(\lambda,\beta)} := \{\mathbb{R}^{N-1} \times [\lambda, \beta]\},$$

per $0 \leq \lambda < \beta$. Sia vera una delle seguenti ipotesi

- (H_1) La non linearità f verifica (f_1), e $2 < p < 3$.
 (H_2) La non linearità f verifica (f_2), e $p > 2$.

Inoltre si ha

$$\begin{cases} -\Delta_p u \leq f(u), & \text{in } \Sigma_{(\lambda,\beta)}, \\ -\Delta_p v \geq f(v), & \text{in } \Sigma_{(\lambda,\beta)}, \\ u \leq v, & \text{su } \partial\Sigma_{(\lambda,\beta)}. \end{cases} \quad (3)$$

Sia $v > 0$ in $\Sigma_{(\lambda-2\bar{\delta}, \beta+2\bar{\delta})}$, per qualche $\bar{\delta} > 0$, e

$$|\nabla v| \leq Cv$$

in $\Sigma_{(\lambda-\bar{\delta}, \beta+\bar{\delta})}$, per qualche costante C .

Allora esiste $\lambda_0 = \lambda_0(N, p, \|\nabla u\|_\infty, \|\nabla v\|_\infty, \|u\|_\infty, \|v\|_\infty, f) > 0$ tale che se, $0 < \lambda < \lambda_0$, segue che

$$u \leq v \quad \text{in } \Sigma_{(\lambda, \beta)}.$$

La prova è basata sull'uso della disuguaglianza di Poincaré e di uno schema di iterazione che fa uso di una particolare scelta di funzioni test.

Il caso $p > 2$ risulta più complicato del caso $1 < p < 2$ dato che l'uso della disuguaglianza classica di Poincaré, deve essere sostituita da una disuguaglianza di Poincaré *pesata*, introdotta da Damascelli-Sciunzi. Tuttavia le costanti coinvolte nella disuguaglianza di Poincaré *pesata* dipendono dal minimo della soluzione u nel dominio considerato. Di conseguenza la costante di Poincaré esplode quando u approssima zero, dato che nessuna assunzione a-priori è fatta sulla u .

Dal Teorema 7 segue il

Teorema 6 Sia $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ una soluzione positiva di (4) con $|\nabla u| \in L^\infty(\mathbb{R}_+^N)$. Si assuma una delle seguenti ipotesi

(H₁) La non linearità f verifica (f_1), e $2 < p < 3$.

(H₂) La non linearità f verifica (f_2), e $p > 2$.

Allora u è monotona crescente rispetto alla direzione- x_N con

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^N,$$

e conseguentemente $u \in C_{loc}^2(\overline{\mathbb{R}_+^N})$.

Se inoltre si assume (H₁) con $N = 3$ e che u sia limitata.

Allora u ha simmetria 1-dimensionale, i.e. $u(x', x_N) = u(x_N)$.

In [5] si studiano soluzioni deboli $C^{1,\alpha}$ del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + b(u)|\nabla u|^q = f(u), & \text{in } \mathbb{R}_+^N \\ u(x', y) > 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^N \\ u(x', 0) = 0, & \text{su } \partial\mathbb{R}_+^N \end{cases} \quad (4)$$

con $N \geq 2$, $\alpha \in (0, 1)$ e

(H_1) $1 < p < 2$, $1 < q \leq p$;

(H_2) a, b e f sono funzioni localmente Lipschitziane in \mathbb{R} ;

(H_3) esiste $\gamma > 0$ tale che $a(s) \geq \gamma$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Nel lavoro, assumendo che, più in generale, $a = a(x, u)$, $b = b(x, u)$ e $f = f(x, u)$ sono funzioni definite in $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}$ che soddisfano

(H_4) a, b e f sono localmente Lipschitziane, uniformemente rispetto a x . Cioè per ogni $M > 0$, esistono costanti positive $L_a = L_a(M)$, $L_b = L_b(M)$ e $L_f = L_f(M)$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}_+^N$ e per ogni $u, v \in [-M, M]$ si ha:

$$|a(x, u) - a(x, v)| \leq L_a |u - v|, \quad |b(x, u) - b(x, v)| \leq L_b |u - v|,$$

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L_f |u - v|;$$

Per ogni $M > 0$ esiste $K = K(M) > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}_+^N$ e ogni $s \in [-M, M]$ si ha:

$$|a(x, s)| \leq K, \quad |b(x, s)| \leq K;$$

(H_5) Esiste una costante $\gamma > 0$ tale che $a(x, s) \geq \gamma$ per ogni $(x, s) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}$,

si prova il seguente teorema di confronto

Teorema 7 *Sia $1 < p < 2$, $N \geq 2$ e si assuma $(H_1), (H_4), (H_5)$. Sia $\lambda_0 > 0$ e $M_0 > 0$. Si consideri $\lambda \in (0, \lambda_0]$, $\tau, \varepsilon > 0$ e sia*

$$\Sigma_{(\lambda, y_0)} := \mathbb{R}^{N-1} \times \left(y_0 - \frac{\lambda}{2}, y_0 + \frac{\lambda}{2}\right), \quad y_0 \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Siano $u, v \in C_{loc}^{1,\alpha}(\overline{\Sigma_{(\lambda,y_0)}})$ tali che $\|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty \leq M_0$, $\|v\|_\infty + \|\nabla v\|_\infty \leq M_0$ e

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + b(x, u)|\nabla u|^q \leq f(x, u), & \text{in } \Sigma_{(\lambda,y_0)}, \\ -\operatorname{div}(a(x, v)|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + b(x, v)|\nabla v|^q \geq f(x, v), & \text{in } \Sigma_{(\lambda,y_0)}, \\ u \leq v, & \text{su } \partial\mathcal{S}_{(\tau,\varepsilon)}, \end{cases}$$

dove l'insieme aperto $\mathcal{S}_{(\tau,\varepsilon)} \subseteq \Sigma_{(\lambda,y_0)}$ è tale che

$$\mathcal{S}_{(\tau,\varepsilon)} = \bigcup_{x' \in \mathbb{R}^{N-1}} I_{x'}^{\tau,\varepsilon},$$

e l'insieme aperto $I_{x'}^{\tau,\varepsilon} \subseteq \{x'\} \times (y_0 - \frac{\lambda}{2}, y_0 + \frac{\lambda}{2})$ ha la forma

$$I_{x'}^{\tau,\varepsilon} = A_{x'}^\tau \cup B_{x'}^\varepsilon \quad \text{con} \quad |A_{x'}^\tau \cap B_{x'}^\varepsilon| = 0$$

e, per x' fisso, $A_{x'}^\tau, B_{x'}^\varepsilon \subset (y_0 - \frac{\lambda}{2}, y_0 + \frac{\lambda}{2})$ sono insiemi misurabili

$$|A_{x'}^\tau| \leq \tau \quad e \quad B_{x'}^\varepsilon \subseteq \{y \in \mathbb{R} : |\nabla u(x', y)| < \varepsilon, |\nabla v(x', y)| < \varepsilon\}.$$

Allora esiste

$$\tau_0 = \tau_0(N, p, q, \lambda_0, M_0, \gamma) > 0$$

e

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N, p, q, \lambda_0, M_0, \gamma) > 0$$

tali che, se $0 < \tau < \tau_0$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, si ha che

$$u \leq v \quad \text{in} \quad \mathcal{S}_{(\tau,\varepsilon)}.$$

Il Teorema 7 è lo step fondamentale per provare il risultato principale di questo lavoro:

Teorema 8 Sia u una soluzione di (4) e si assuma che $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ e $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^N)$. Si assumano le ipotesi (H_1) , (H_2) e (H_3) e che $f(s) > 0$ se $s > 0$.

Allora u è monotona crescente rispetto alla direzione y , cioè

$$\frac{\partial u}{\partial y} \geq 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_+^N.$$

Si osserva che la monotonia delle soluzioni è ottenuta senza la restrizione $\frac{2N+2}{N+2} < p \leq 2$ presente in [3].

In [6] si studia un problema del tipo

$$-\operatorname{div}(|Du|^{p(x)-2}Du) = f(x, u), \quad \text{in } \Omega,$$

ottenendo alcuni risultati di simmetria per soluzioni positive. Si provano due diversi risultati di simmetria utilizzando due tecniche completamente differenti:

1. La prima classe di risultati è ottenuta attraverso un uso del Teorema del Passo della Montagna che incorpora le caratteristiche di simmetria delle soluzioni se il funzionale, naturalmente associato al problema, cresce per polarizzazione;
2. la seconda classe di risultati è ottenuta quando Ω è una sfera di \mathbb{R}^N , utilizzando stime di regolarità per le soluzioni $C^{1,\alpha}$ e il concetto di *semi-stabilità* delle stesse.

Indichiamo con $H \subset \mathbb{R}^N$ un semi-piano affine chiuso di \mathbb{R}^N , con $\sigma_H(x)$ il riflesso di un punto $x \in \mathbb{R}^N$ rispetto a ∂H e con \mathcal{H}_0 l'insieme di tutti i semi-spazi $H \subset \mathbb{R}^N$ tali che $0 \in \partial H$. Indichiamo la polarizzazione di u rispetto a H con u^H e $\sigma_H(\Omega)$ denota l'insieme di tutti i punti riflessi di Ω . Il primo risultato ottenuto è il seguente:

Teorema 9 *Sia $\sigma_H(\Omega) = \Omega$ per qualche $H \in \mathcal{H}_0$ e per ogni $x \in \Omega$*

$$p(\sigma_H(x)) = p(x), \quad q(\sigma_H(x)) = q(x), \quad V(\sigma_H(x)) = V(x), \quad K(\sigma_H(x)) = K(x).$$

Assumiamo anche che p, q siano funzioni continue log-Hölderiane e $q : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione continua con

$$\inf_{x \in \Omega} (q(x) - p(x) + 1) > 0 \quad \text{e} \quad \inf_{x \in \Omega} (p^*(x) - q(x) - 1) > 0, \quad p^*(x) = \frac{p(x)N}{N - p(x)},$$

$V, K \in C(\bar{\Omega})$ con $V(x) \geq V_0 > 0$ per ogni $x \in \Omega$. Allora esiste una soluzione non banale $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ di

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|Du|^{p(x)-2}Du) + V(x)u^{p(x)-1} = K(x)u^{q(x)} & \text{per } x \in \Omega, \\ u \geq 0 & \text{per } x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

a livello di passo-Montano tale che u^H è anche una soluzione di (5) allo stesso livello di energia.

Si considera inoltre il problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|Du|^{p(|x|)-2}Du) = f(|x|, u) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6)$$

con $f(t, s)$ localmente Lipschitziana in $[0, \infty) \times [0, \infty)$ e positiva in $[0, \infty) \times (0, \infty)$. L'altro risultato ottenuto è il seguente:

Teorema 10 *Sia Ω una sfera in \mathbb{R}^N e sia u una soluzione $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ di (6), con $f(t, s)$ localmente Lipschitziana in $[0, \infty) \times [0, \infty)$ e positiva in $[0, \infty) \times (0, \infty)$. Sia $p \in C^1(\Omega)$ con $p(|x|) \geq 2$. Se u è semi-stabile, allora u è a simmetria radiale.*

In [7] si considerano soluzioni deboli non negative dell'equazione quasilineare in \mathbb{R}^N

$$u \geq 0, \quad u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad -\Delta_p u = u^{p^*-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad (7)$$

con $1 < p < 2 \leq N$, $p^* := \frac{Np}{N-p}$ è l'esponente critico dell'immersione di Sobolev e si assume che la non linearità in (7) sia localmente Lipschitziana in $[0, +\infty)$. Il problema quasilineare è difficile da studiare, non solo per la mancanza di principi di confronto per operatori quasilineari, ma anche perché una trasformazione di tipo Kelvin (utile nel caso semilineare) non è disponibile. Il principale risultato ottenuto è dato dal seguente

Teorema 11 *Sia $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ una soluzione (non negativa e quindi non banale) positiva di (7) e assumiamo che $1 < p < 2$ e $p^* \geq 2$, cioè $\frac{2N}{N+2} \leq p < 2$.*

Allora u è radiale rispetto a un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ che è l'unico punto critico di u ed u è strettamente radialmente decrescente, cioè esiste una funzione $C^1 v : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, tale che $v'(r) < 0$ per ogni $r > 0$ e tale che $u(x) = v(r)$, $r = |x - x_0|$.

Questo risultato permette di usare un risultato di classificazione dovuto a Bidaut-Véron, Guedda, e Veron e dedurre che, per $\frac{2N}{N+2} \leq p < 2$, tutte le soluzioni di (7) in $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ sono date dalla seguente espressione

$$\mathcal{U}_{\lambda, x_0} := \left[\frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}} (N^{\frac{1}{p}} (\frac{N-p}{p-1})^{\frac{p-1}{p}})}{\lambda^{\frac{p}{p-1}} + |x - x_0|^{\frac{p}{p-1}}} \right]^{\frac{N-p}{p}}, \quad \lambda > 0 \quad x_0 \in \mathbb{R}^N. \quad (8)$$

In [8] si studia l'esistenza e la non esistenza di soluzioni del problema ellittico supercritico

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{u^q}{|x|^p} + \lambda f(x) u^r & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (9)$$

con $f \in L^\infty(\Omega)$, $f \geq 0$, $\lambda > 0$, $q > 0$, $0 \leq r < p-1$, $1 < p < N$ e $\Omega \in \mathbb{R}^N$, un dominio limitato.

Il problema (9) è caratterizzato da un diverso comportamento circa l'esistenza o la non esistenza di soluzioni. Nel caso $f(x) \equiv 0$, determinante è la geometria del dominio e la posizione dell'origine rispetto al dominio stesso; nel caso $f(x) \gtrless 0$ determinante è solo la posizione dell'origine rispetto al dominio stesso. La presenza del potenziale di Hardy, rende tale problema supercritico e quindi una formulazione variazionale standard non può essere applicata direttamente.

Nel caso $f(x) \equiv 0$ si procede utilizzando alcuni funzionali dell'energia che sono

- (i) un troncamento mediante l'utilizzo del peso troncato $\frac{1}{|x|^{p+\delta}}$,
- (ii) una penalizzazione del contributo all'energia troncata in un sottodominio che contiene l'origine.

In questo modo si trova una soluzione di passo montano per il funzionale penalizzato e troncato e quindi, dopo un opportuno processo di limite, è possibile ottenere una soluzione in energia del problema considerato.

I principali risultati ottenuti nel caso $f(x) \equiv 0$ sono i seguenti:

Teorema 12 *Si assuma $1 < p < N$ e $p - 1 < q < p^* - 1$. Sia inoltre $f(x) \equiv 0$. Allora (9) non ha soluzioni in energia se $0 \in \partial\Omega$ e Ω è stellato rispetto all'origine.*

Teorema 13 *Sia $f(x) \equiv 0$ e si assuma che*

1. Ω_ε sia un dominio di tipo dumbbell;
2. $0 \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_\varepsilon$;
3. $p - 1 < q < p^* - 1$.

Allora esiste ε_0 tale che $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, (9) ha una soluzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$.

Nel caso $f(x) \gtrless 0$, usando il metodo delle sopra e sotto soluzioni, si prova che se $0 \in \partial\Omega$ e λ è sufficientemente piccolo si ottiene l'esistenza di soluzione *per ogni* $q > p - 1$ e *per ogni dominio* Ω :

Teorema 14 *Sia $0 \in \partial\Omega$, $q > p - 1$, $1 < p < N$, $0 \leq r < p - 1$ e si consideri il problema (9) con $f \in L^\infty(\Omega)$, $f(x) \gtrless 0$ e $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un dominio regolare limitato. Allora esiste una costante positiva λ_{\max} tale che*

- (a) $\forall \lambda \in (0, \lambda_{\max})$ il problema (9) ha una soluzione $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
- (b) Se $\lambda > \lambda_{\max}$ il problema (9) non ha soluzioni.

Inoltre se $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_{\max}$, allora $u_{\lambda_1} \leq u_{\lambda_2}$.

In [9] si studia l'esistenza di soluzioni

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |\nabla u|^p = \vartheta \frac{u^q}{|x|^p} + f & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (10)$$

con $\vartheta > 0$, $p - 1 \leq q < p$, $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq 0$, e $1 < p < N$.

In questo lavoro $0 \in \Omega$; grazie all'effetto regolarizzante dovuto alla presenza del termine $|\nabla u|^p$, si prova l'esistenza di una soluzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ di (10), $\forall \vartheta > 0$ e per ogni $f \in L^1(\Omega)$, $f(\cdot) \geq 0$. Si ha il seguente

Teorema 15 *Si consideri il problema (10) con $p > 1$ e $p - 1 \leq q < p$. Si assuma $f \in L^1(\Omega)$, positiva. Allora $\forall \vartheta > 0$ esiste una soluzione debole $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Lo schema utilizzato nella prova è il seguente

- (i) Si mostra l'esistenza di una soluzione del problema troncato

$$-\Delta_p u_k + |\nabla u_k|^p = \vartheta T_k\left(\frac{u_k^q}{|x|^p}\right) + T_k(f) \quad \text{in } \Omega, \quad u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

con $T_k(s) = \max\{\min\{k, s\}, -k\}$.

- (ii) Con opportune stime a priori, passando a limite nel problema troncato si ottiene l'esistenza di una soluzione del problema (10).

Dopo aver provato l'esistenza di soluzioni, nella seconda parte di questo lavoro si studiano le proprietà qualitative delle soluzioni deboli di (10). Vale il seguente

Teorema 16 *Sia $u \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ una soluzione debole di (10). Se $1 < p < 2$ si assuma inoltre che $|\nabla u| \in L^\infty(\Omega)$. Sia Ω un dominio convesso rispetto alla direzione- ν ($\nu \in S^{N-1}$) e simmetrico rispetto a T_0^ν , con*

$$T_0^\nu = \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \nu = 0\}.$$

Si assuma $f \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ non decrescente rispetto alla direzione- ν .

Allora u è simmetrica rispetto a T_0^ν e non decrescente rispetto alla direzione- ν in

$$\Omega_0^\nu = \{x \in \Omega : x \cdot \nu < 0\}.$$

Inoltre, se Ω è una palla, allora u è a simmetria radiale e $\frac{\partial u}{\partial r}(r) < 0$ con $r \neq 0$.

D. Problemi Transitori Parabolici. (lavoro [10])

Nel lavoro [10] si studia il problema parabolico quasilineare

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = h(x)u^q, & u \geq 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0 & & \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), & f \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

con $-\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 1$, $q > 0$, e con $h(x) > 0$ e $f(x) \geq 0$ funzioni non negative che soddisfano opportune ipotesi. Si studia l'esistenza di soluzioni globali e le proprietà qualitative asintotiche di estinzione in tempo finito (*EFT*) e di velocità di propagazione finita (*FSP*). Si trova l'esponente ottimale di reazione $q_0 := \min\{1, (p-1)\}$ e in particolare si prova che

- se $1 < p < 2$ e $0 < q < p-1$, le soluzioni non hanno la proprietà di estinzione in tempo finito;
- Se $p > 2$ e $0 < q < 1$, le soluzioni non hanno la proprietà di velocità di propagazione finita.

Lo studio di esistenza e delle proprietà qualitative viene effettuato su domini limitati e su tutto lo spazio \mathbb{R}^N . I principali risultati ottenuti sono i seguenti

Teorema 17 *Sia*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = h(x)u^q, & u > 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0 & & \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0 & & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (11)$$

con $p > 1$, $0 < q < \min\{p-1, 1\}$ e $h(x) \in L^\infty(\Omega)$ tale che $\underline{h} := \inf_{\Omega} h(x) > 0$. Allora il problema (11) ammette una soluzione globale positiva massimale.

L'ottimalità dell'esponente $q_0 = p-1$ segue dai due prossimi teoremi. Il primo riguarda la proprietà di estinzione in tempo finito:

Teorema 18 *Sia Ω un dominio limitato e regolare in \mathbb{R}^N , $1 < p < 2$, $p - 1 < q \leq 1$ e si consideri il problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = h(x)u^q, & u \geq 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0 & & \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), & f \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (12)$$

con $h(x) \in L^\infty(\Omega)$ una funzione non negativa. Allora per qualsiasi dato iniziale $f \in L^2(\Omega)$, esiste una soluzione $u(x, t)$ del problema (12). Inoltre, se

- (i) $\frac{2N}{N+2} \leq p < 2$ e la norma $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ è sufficientemente piccola;
- (ii) oppure $1 < p < \frac{2N}{N+2}$ e la norma $\|f\|_{L^s(\Omega)}$ con $s = N(2-p)/p$, è sufficientemente piccola,

allora la soluzione $u(x, t)$ ha la proprietà di (EFT), cioè esiste

$$T^* = T^*(p, N, \Omega, \|h\|_\infty, \|f\|_{L^{\max\{2, s\}}(\Omega)}) > 0 \quad \text{tale che} \quad u(\cdot, t) \equiv 0 \quad \forall t \geq T^*.$$

Il secondo teorema riguarda la proprietà di velocità di propagazione finita:

Teorema 19 *Sia Ω un dominio regolare limitato in \mathbb{R}^N , $p > 2$, $1 \leq q < p - 1$ e si consideri il problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = h(x)u^q, & u \geq 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0 & & \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), & f \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (13)$$

con $h(x) \in L^\infty(\Omega)$ una funzione non negativa. Allora, per tutti i dati iniziali $f \in L^2(\Omega)$ con $f \geq 0$, esiste una soluzione $u(x, t)$ del problema (13). Inoltre, se supponiamo che

$$\text{suppt } f(x) \subset B_{R_0} \subset\subset \Omega$$

per qualche $R_0 > 0$, allora la soluzione $u(x, t)$ ha la proprietà di (FSP), ovvero esiste $T^* > 0$ tale che

$$\text{suppt } u(\cdot, t) \subset\subset \Omega$$

per ogni $0 \leq t \leq T^*$.

Risultati analoghi contenuti nei tre teoremi sopra enunciati, sono stati ottenuti anche nell'intero spazio \mathbb{R}^N .

• **Pubblicazioni nel periodo dal 1-12-2011 al 1-12-2014**

1. Charro, F., Montoro, L., Sciunzi, B., *Monotonicity of solutions of Fully nonlinear uniformly elliptic equations in the half-plane*, J. Diff. Equations, 251 (2011), no. 6, 1562-1579.
2. Montoro, L., *On the numerical computation of mountain pass solutions to some perturbed semi-linear elliptic problem*, SēMA Journal, no. 54 (2011), 65-90.
3. Farina, A., Montoro, L., Sciunzi, B., *Monotonicity and one-dimensional symmetry for solutions of $-\Delta_p u = f(u)$ in half-spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 43 (2012), no. 1-2, 123-145.
4. Farina, A., Montoro, L., Sciunzi, B., *Monotonicity of solutions of quasilinear degenerate elliptic equation in half-spaces*, Math. Ann., 357 (2013), no. 3, 855-893.
5. Farina, A., Montoro, L., Riey, G., Sciunzi, B., *Monotonicity of solutions to quasilinear problems with a first-order term in half-spaces*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, (2013), <http://dx.doi.org/10.1016/j.anihpc.2013.09.005>.
6. Montoro, L., Sciunzi, B., Squassina, M., *Symmetry results for the $p(x)$ -Laplacian equation*, Adv. Nonlinear Anal., 2 (2013), 43-64.
7. Damascelli, L., Merchán, S., Montoro, L., Sciunzi, B., *Radial symmetry and applications for a problem involving the $-\Delta_p(\cdot)$ operator and critical nonlinearity in \mathbb{R}^N* , Adv. Math., 265 (2014), 313-335.
8. Merchán, S., Montoro, L., *Remarks on the existence of solutions to some quasilinear elliptic problems involving the Hardy-Leray potential*, Ann. Mat. Pura Appl., 193 (2014), no. 2, 609-632.

9. Merchán, S., Montoro, L., Peral, I., Sciunzi, B., *Existence and qualitative properties of solutions to a quasilinear elliptic equation involving the Hardy-Leray potential*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 31 (2014), no. 1, 1-22.
10. Merchán, S., Montoro, L., Peral, I., *Optimal reaction exponent for some qualitative properties of solutions to the p -heat equation*, Commun. Pure Appl. Anal., to appear.

Ultimo aggiornamento, 22 dicembre 2014.

Luigi Montoro