

Funzioni con primitiva

Jürgen Appell (Würzburg)

Riassunto: In ogni corso di Analisi 1 si impara che ogni funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ha una primitiva (cioè è la derivata $f = F'$ di un'altra funzione F), ed ogni funzione con primitiva ha la proprietà del valor intermedio (cioè soddisfa $f([\alpha, \beta]) \supseteq [f(\alpha), f(\beta)]$ per ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$).

A questo punto studentesse più brave a volte pongono due domande:

- *Si può vedere che una funzione ha una primitiva, senza calcolarla?*
- *Esistono funzioni con la proprietà del valor intermedio, ma senza primitiva?*

Inoltre, visto che la somma $f + g$ di due funzioni f e g con primitiva ha anche una primitiva (che è banale!), si pongono in maniera naturale le seguenti ulteriori domande:

- *Se f e g hanno una primitiva, anche il prodotto fg ha una primitiva?*
- *Se f e g hanno una primitiva, anche la composizione $g \circ f$ ha una primitiva?*

Nella conferenza diamo la risposta completa a tutte le domande, basata in parte su ricerche molto recenti. Le dimostrazioni sono tutt'altro che banali, ma invece di discutere le dimostrazioni presentiamo una serie di esempi illustrativi. La presentazione dei risultati ed esempi non richiede conoscenze specialistiche e pertanto è accessibile anche agli studenti e ai professori pensionati (e completamente rincoglioniti come me).