Calcolo proposizionale

Vero e falso: logica binaria

- Una **proposizione** è una affermazione (formula ben formata di un linguaggio), che può essere **vera** oppure **falsa**
- **Es. “Mia madre mi vuole bene”**
- Non esiste una terza possibilità

Proposizioni

- **Proposizione semplice** =
  complesso linguistico o segnico per il quale ha senso attribuire un valore di verità

- **Valore di verità** (principio di bivalenza)

può essere	***vero***	***V***	***true***	***T***	***1***
	falso	***F***	***false***	***F***	***0***

- **Esempio1** la_luna_è_verde_a_pallini_blu
- **Esempio2** A

Connettivi

- Le proposizioni si possono connettere fra loro a formare ***proposizioni composte***

- Il valore di verità della proposizione composta dipende dal tipo di ***connettivo*** e dal valore di verità delle proposizioni componenti

- I connettivi si distinguono dal numero di proposizioni (1, 2, … n) che possono connettere (***mono-, bi-, … n- argomentali***)

- **L'effetto** dei connettivi si specifica **elencando** tutti i possibili casi di combinazioni di valori vero e falso delle proposizioni componenti

La negazione “NOT”

- Se P è una proposizione, si danno due casi possibili:
- Di conseguenza, per la negazione di P si avranno pure 2 casi corrispondenti:

Se:

P = VERO → NOT P = FALSO

P = FALSO → NOT P = VERO

“NOT” È UN OPERATORE BOOLEANO UNARIO (l’unico connettivo mono-argomentale)

Esempio *not*

- Il connettivo NOT nega il valore delle proposizioni

piove		***not*** **piove**
		not
V		**F**
F		**V**

Connettivi bi-argomentali

A	B		$\underline{V}$	=A	=B	and	or	=	<	→	$\underline{F}$	≠A	≠B	nand	nor	≠	>	≥
V	V		V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
V	F		V	V	F	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V		V	F	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F		V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F	V

- Alcuni sono banali: rimandano tutti V, tutti F, stessi valori di A o B, valori negati di A e B
- Altri sono parte fondamentale del nostro linguaggio

Connettivi bi-argomentali:
< = > → ≠ ≥

- Si usano anche con valori numerici
- Si ricordi la corrispondenza di "***F*** a ***0*** " e di "***V*** a ***1***"

- **=** corrisponde a "se e solo se" (↔)

  Es. sarò_promosso "se e solo se" imparerò_la_materia
- "implica" (→)

  Es. essere_multiplo_di_10 "implica" essere_multiplo_di_2
- ≠ corrisponde alla ***o*** alternativa: o ... o ....

  Es. ***o*** ti_mangi_questa_minestra ***o*** ti_butti_dalla_finestra

Operatori booleani binari

AND	congiunzione
OR	disgiunzione inclusiva
XOR	disgiunzione esclusiva

La congiunzione "AND"

- Date due proposizioni P e Q l'operatore "AND" permette di costruire una nuova proposizione "P AND Q" che sarà VERA solo se P e Q sono entrambe vere

P	Q	P AND Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La congiunzione "AND"

- Corrisponde alla congiunzione italiana ***e*** **(• ∧)**
- Esempio: per andare a Parigi, debbo stare bene ***e*** debbo avere i soldi per viaggio, vitto ed alloggio

Sto_bene	**Ho_i_soldi**		**Sto_bene AND Ho_i_soldi**
			AND
V	**V**		**V**
V	**F**		**F**
F	**V**		**F**
F	**F**		**F**

La disgiunzione inclusiva “OR”

- Date due proposizioni P e Q l’operatore “OR” permette di costruire una nuova proposizione “P OR Q” che sarà FALSA solo se P e Q sono entrambe false.

P	Q	P OR Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disgiunzione inclusiva "OR"

- Corrisponde alla disgiunzione ***<u>o</u>*** **(+** ∨)
- Esempio: per essere promosso, debbo essere preparato ***<u>o</u>*** debbo essere raccomandato

essere_preparato	**essere_raccomandato**		**essere_promosso OR essere_raccomandato**
			OR
V	**V**		**V**
V	**F**		**V**
F	**V**		**V**
F	**F**		**F**

La disgiunzione esclusiva “XOR”

- Date due proposizioni P e Q l’operatore “XOR” permette di costruire una nuova proposizione “P XOR Q” che sarà VERA quando P e Q hanno valori diversi.

P	Q	P XOR Q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposizioni composte

- Si valutano attribuendo valori di verità alle proposizioni semplici e applicando i connettivi
- L'ordine di applicazione dei connettivi rispecchia, a meno di parentesi "(" e ")" la seguente gerarchia:

not
and
or
$< \;=\; > \;\leq \neq \geq$

- **Es.:** per A vero e B falso not B or (B and not A) = A

	not B	or	(B and	not A)	= A
ordine di applicazione	3	4	2	1	5
risultati delle applicazioni	V	V	F	F	**V**

Proposizioni composte

- Vediamo meglio il metodo che è lo stesso che per le espressioni aritmetiche:

$$x + (y - z) / x$$

(con ordine di applicazione) 3 1 2

e con x = 5, y = 20, z = 10

x	+	(y	-	z)	/	x	passo
5	+	***(20***	***-***	***10)***	/	5	0
5	+	***10***			***/***	***5***	1
5	+	***2***					2
7							3

Proposizioni composte

- Vediamo meglio l'esempio precedente: ***A=V, B=F***

la proposizione **not B or (B and not A) = A**

con ordine di applicazione 3 4 2 1 5

not	B	or	(B	and	not	A)	=	A	passo
not	F	or	(F	and	**not**	***V)***	=	V	0
not	F	or	***(F***	***and***	***F)***		=	V	1
not	***F***	or	F				=	V	2
V		***or***	***F***				=	V	3
V							**=**	***V***	4
V									5

Tavole di verità

Per calcolare i valori di verità di una proposizione non elementare come:

(P AND Q) OR (NOT P AND NOT Q)

Tavole di verità

... si assegnano i valori di ingresso alle varie occorrenze di P e di Q

(P	AND	Q)	OR	(NOT P	AND	NOT Q)

Tavole di verità

... si assegnano i valori di ingresso alle varie occorrenze di P e di Q

(P	AND	Q)	OR	(NOT P	AND	NOT Q)
V						
V						
F						
F						

Tavole di verità

… si assegnano i valori di ingresso alle varie occorrenze di P e di Q

(P	AND	Q)	OR	(NOT P	AND	NOT Q)
V		V				
V		F				
F		V				
F		F				

Tavole di verità

… si assegnano i valori di ingresso alle varie occorrenze di P e di Q

(P	AND	Q)	OR	(NOT P	AND	NOT Q)
V		V		F		
V		F		F		
F		V		V		
F		F		V		

Tavole di verità

... si assegnano i valori di ingresso alle varie occorrenze di P e di Q

(P	AND	Q)	OR	(NOT P	AND	NOT Q)
V		V		F		F
V		F		F		V
F		V		V		F
F		F		V		V

Tavole di verità

… si calcolano poi i valori del primo AND e si cancellano le colonne dei valori usati

(P	AND	Q)	OR	(NOT P	AND	NOT Q)
~~V~~	V	~~V~~		F		F
~~V~~	F	~~F~~		F		V
~~F~~	F	~~V~~		V		F
~~F~~	F	~~F~~		V		V

Tavole di verità

… si opera allo stesso modo con il secondo AND

(P	AND	Q)	OR	(NOT P	AND	NOT Q)
V	V	V		F	F	F
V	F	F		F	F	V
F	F	V		V	F	F
F	F	F		V	V	V

Tavole di verità

... si calcola infine OR utilizzando come valori di ingresso le due colonne rimaste...

(P	AND	Q)	OR	(NOT P	AND	NOT Q)
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Tavole di verità

… sotto OR, che è il "connettivo principale" troviamo la tavola di verità della proposizione.

(P	AND	Q)	OR	(NOT P	AND	NOT Q)
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Teorema o tautologia

- Proposizione composta che è vera per qualsiasi combinazione di valori di verità attribuita alle sue proposizioni semplici
- Es. *La prima legge di De Morgan*

not (A and B) = not A or not B

2 1 6 3 5 4

ordine di esecuzione

not	(A	and	B)	=	not	A	or	not	B
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

Contraddizione

- Proposizione composta che è falsa per qualsiasi combinazione di valori di verità attribuita alle sue proposizioni semplici
- Es. (A < B) = (A ≥ B)

1 3 2 ordine di esecuzione

(A	<	B)	=	(A	≥	B)
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F

Connettivi tri-, .. , n- argomentali

- BASTA, non se ne può più !
- Ma come descrivere situazioni **più complesse** in cui non sia intuitivo l'uso dei connettivi studiati?
- Sono sufficienti opportune combinazioni di ***not*** ***and*** ***or*** per esprimere un qualsiasi connettivo!
- Es.

A	>	B		A	and	not	B
V	F	V		V	F	F	V
V	V	F		V	V	V	F
F	F	V		F	F	F	V
F	F	F		F	F	V	F

Forme disgiuntive normali

- Utilizzano solo ***not*** ***and*** ***or*** per descrivere risultati dipendenti da valori di verità di proposizioni semplici
- Ci si riferisce alla **tavola di verità** in cui appaiono tutte le possibili assegnazioni di verità delle proposizioni semplici
- Si considerano le **combinazioni** per le quali si ottiene valore di verità V
- Per ogni tale combinazione le proposizioni con valore di **verità F** si fanno precedere da ***not***
- Le proposizioni così modificate vengono fra loro connesse con ***and*** (si creano congiunzioni)
- Tali congiunzioni vengono fra loro connesse con ***or*** , formando una forma disgiuntiva normale

Forme disgiuntive normali

- Es. A=B

A	B		=		
V	V		V	*	A and B
V	F		F		
F	V		F		
F	F		V	*	not A and not B

- Risultato: (A and B) or (not A and not B)

Forme disgiuntive normali

- **Esercizio**: condizione di presa nel **Gioco della Briscola** per il giocatore che tira per primo (**G1**)

- Proposizioni che definiscono la condizione:
  - i semi sono uguali (**SU**)
  - il secondo giocatore ha tirato una briscola (**B2**)
  - il valore della carta del I giocatore è maggiore del valore della carta del II giocatore (**M1**)

Forme disgiuntive normali

- Condizione di presa nella briscola per il primo giocatore (elenchiamo le varie combinazioni)

SU	B2	M1		G1
V	V	V		V
V	V	F		F
V	F	V		V
V	F	F		F
F	V	V		F
F	V	F		F
F	F	V		V
F	F	F		V

- **G1 = (SU and B2 and M1) or (SU and not B2 and M1) or (not SU and not B2 and M1) or (not SU and not B2 and not M1)**