Matematica Discreta I

Esame del 21-03-2005

Esercizio 1.

Sia $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 - 2x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_5 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a.) Trovare una base di $Ker(F)$. (4 pt)
b.) Trovare una base di $Im(F)$. (4 pt)
c.) E' $\vec{v} \in Im(F)$? (1 pt)

Esercizio 2.
Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare, e la base naturale di $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, dove F è dato dalla matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ -1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a.) Dimostrare che $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. (1 pt)
b.) Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$. (3 pt)
c.) Scrivere la relazione che lega la matrice $[F]_e^e$ con $[F]_b^b$ e calcolare $[F]_b^b$. (3 pt)
d.) Sia $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$, trovare $F^{44444444444442}(\vec{v})$. (1 pt)

Esercizio 3.

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la retta l e i due piani π_1 e π_2, dove $l = \begin{cases} x &= 3 - t \\ y &= -1 + 3t \\ z &= 1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, e
$\pi_1 : x - y + 2z = 2$ e $\pi_2 : x + y - z = 0$.
a.) Dimostrare che la retta l è parallelo al piano π_1 e anche al piano π_2. (1 pt)
b.) Calcolare la distanza tra l e π_1. (2 pt)
c.) Trovare l'equazione cartesiano del piano che contiene la retta d'intersezione dei piani π_1 e π_2 e la retta l. (3 pt)

Esercizio 4.
Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $T : \vec{v} \mapsto proj_{\vec{e}_1}(\vec{v})$ e sia S la riflessione rispetto alla retta $x + y = 0$.
a.) Trovare la matrice di $T \circ S$ e la matrice di $S \circ T \circ S$. (1 pt)
b.) Dimostrare che esiste un $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ tale che $(S \circ T \circ S)(\vec{v}) = proj_{\vec{n}}(\vec{v})$, per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. (1 pt)
c.) Dimostrare che non esiste un $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ tale che $(T \circ S)(\vec{v}) = proj_{\vec{n}}(\vec{v})$, per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. (1 pt)

Esercizio 5. (2 pt)
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ con $T^3(\vec{v}) = \vec{0}$, ma $T^2(\vec{v}) \neq \vec{0}$.
Dimostrare che $c = (\vec{v}, T(\vec{v}), T^2(\vec{v}))$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e trovare la matice $[T]_c^c$.

Esercizio 6. (3 pt)

6.1. La matrice, rispetto alla base naturale, della riflesione in $\mathbb{R}^2$ rispetto la retta l è dato da $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.
L'equazione cartesiano della retta l è
a.) $x + 3y = 0$ b.) $x - 3y = 0$ c.) $3x + y = 0$ d.) $3x - y = 0$

6.2. L'insieme $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq y^2\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$?
a.) Si!
b.) No, perchè $\vec{0} \notin U$.
c.) No, perchè esistono $\vec{v}, \vec{w} \in U$ con $\vec{v} + \vec{w} \notin U$.
d.) No, perchè esistono $\vec{v} \in U$ e $k \in \mathbb{R}$ con $k\vec{v} \notin U$.

6.3. Sia A una matrice 3×3 dove la terza riga di A è la somma della prima e la seconda riga di A. Sia $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Allora il sistema d'equazioni lineare $A\vec{x} = \vec{b}$
a.) non ha soluzioni.
b.) ha un unico soluzione.
c.) ha infinite soluzioni.
d.) Non si può dire, dipende da A.

Le risposte dei esercizi 1, 2, 3, 4 e 5 devono essere giustificate.