Matematica Discreta I

Esame del 12-07-2005

Esercizio 1.

Sia $F:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} x_1+2x_2+x_3+x_5\\ x_1+2x_2-x_4+2x_5\\ -2x_1-4x_2+2x_4-4x_5\\ 3x_1+6x_2+x_3-x_5\\ -x_1-2x_2+2x_3+2x_4-x_5\end{pmatrix}$ e $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\5\\2\end{pmatrix}$.

a.) Trovare una base di $Ker(F)$. (4 pt)

b.) Trovare una base di $Im(F)$. (4 pt)

c.) E' $\vec{v}\in Im(F)$? (1 pt)

Esercizio 2.

Siano $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare, e la base naturale di $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in\mathbb{R}^3$, dove F è dato dalla matrice $[F]_e^e=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-2&7\\0&-1&3\end{pmatrix}$, $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\vec{v}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

a.) Dimostrare che $b=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. (1 pt)

b.) Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$. (3 pt)

c.) Scrivere la relazione che lega la matrice $[F]_e^e$ con $[F]_b^b$ e calcolare $[F]_b^b$. (3 pt)

d.) Trovare tutti i vettori $\vec{v}$ con $F^{66666666666666666664}(\vec{v})=\vec{v}_1-\vec{v}_2$. (1 pt)

Esercizio 3.

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ le rette $l=\begin{cases} x&=&5+t\\ y&=&3-t\\ z&=&3+2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$, e $m=\begin{cases} x&=&-2-2s\\ y&=&4+2s\\ z&=&1-4s\end{cases}, s\in\mathbb{R}$.

a.) Dimostrare che le retta l e m sono parallele. (1 pt)

b.) Calcolare la distanza tra l e m. (2 pt)

c.) Trovare l'equazione cartesiano del piano che contiene l e che è perpendicolare al piano che contiene le due rette l e m. (2 pt)

Esercizio 4.

Sia $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta $x-y=0$.

a.) Trovare una base b di $\mathbb{R}^2$ tale che $[T]_b^b=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$. (1 pt)

b.) Trovare tutte le base c di $\mathbb{R}^2$, o spiegiare perchè non esistono, tale che $[T]_c^c=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$. (2 pt)

Esercizio 5. (2 pt)

Sia $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare e sia A la sua matrice (rispetto alla base naturale).
Sia $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare dato da $S:\vec{v}\mapsto T(\vec{v})-\vec{v}$.
Dimostare: se per ogni $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ vale $S^2(\vec{v})=\vec{0}$, allora A è una matrice invertibile.

Esercizio 6. (3 pt)

6.1. Sia $\vec{n}\in\mathbb{R}^3$ un vettore non nullo e sia $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $T:\vec{v}\mapsto\vec{v}-proj_{\vec{n}}(\vec{v})$. Allora la dimensione di $Im(T)$ è

a.) 0 b.) 1 c.) 2 d.) 3

6.2. L'insieme $U=\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid x^2\geq 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$?

a.) Si!

b.) No, perchè $\vec{0}\notin U$.

c.) No, perchè esistono $\vec{v},\vec{w}\in U$ con $\vec{v}+\vec{w}\notin U$.

d.) No, perchè esistono $\vec{v}\in U$ e $k\in\mathbb{R}$ con $k\vec{v}\notin U$.

6.3. Sia A una matrice 2×2 dove la prima righa di A è 3 volte la seconda righa di A. Sia $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Allora il sistema d'equazioni lineare $A\vec{x}=\vec{b}$

a.) non ha soluzioni.

b.) ha un unico soluzione.

c.) ha infinite soluzioni.

d.) Non si può dire, dipende da A.

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, e 5 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 6, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.