Matematica Discreta I

Esame del 13-09-2005

Esercizio 1.

Sia $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 \\ 3x_1 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 \\ 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a.) Trovare una base di $Ker(F)$. (4 pt)
b.) Trovare una base di $Im(F)$. (4 pt)
c.) E' $\vec{v} \in Im(F)$? (1 pt)

Esercizio 2.

Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare, e la base naturale di $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, dove F è dato dalla matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a.) Dimostrare che $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. (1 pt)
b.) Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$. (3 pt)
c.) Scrivere la relazione che lega la matrice $[F]_e^e$ con $[F]_b^b$ e calcolare $[F]_b^b$. (3 pt)
d.) Trovare tutti i vettori $\vec{v}$ con $F^{123454321}(\vec{v}) = -\vec{v}$. (1 pt)

Esercizio 3.

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la retta $l = \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 \\ z = 6 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, il piano $\pi_1 : 3x - 2y - 3z = 1$ e i due punti $A = (2, 1, 1)$ e $B = (-1, -1, 1)$.

a.) Dimostrare che la retta l e il punto A sono contenuto nel piano π_1. (1 pt)
b.) Calcolare la distanza tra A e l. (2 pt)
c.) Trovare l'equazione cartesiano del piano che contiene i punti A e B e che interseca il piano π_1 in una retta perpendicolare alla retta l. (3 pt)

Esercizio 4.

Siano $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $T : \vec{v} \mapsto \vec{v} - proj_{\vec{n}}(\vec{v})$.

a.) Trovare una base di $Ker(T)$. (1 pt)
b.) Trovare una base b di $\mathbb{R}^3$ tale che $[T]_b^b = M$ o spiegiare perchè non esiste un tale base. (1 pt)

Esercizio 5. (2 pt)

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare e sia e la base naturale di $\mathbb{R}^2$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $S_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare dato da $\vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$. Dimostare che $T = S_\lambda$, per certo $\lambda \in \mathbb{R}$, se e solo se $[T]_b^b = [T]_e^e$ per ogni base b di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 6. (3 pt)

6.1. Quante possibilità per la dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ci sono?
a.) 2 b.) 3 c.) 4 d.) infinite

6.2. L'insieme $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)^2 \leq 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$?
a.) Si!
b.) No, perchè $\vec{0} \notin U$.
c.) No, perchè esistono $\vec{v}, \vec{w} \in U$ con $\vec{v} + \vec{w} \notin U$.
d.) No, perchè esistono $\vec{v} \in U$ e $k \in \mathbb{R}$ con $k\vec{v} \notin U$.

6.3. Sia A una matrice $n \times m$ e siano $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Se il sistema d'equazioni lineare omogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$ ha un unico soluzione. Allora il sistema d'equazioni lineare omogeneo ${}^TA\vec{y} = \vec{0}$
a.) non ha soluzioni.
b.) ha un unico soluzione.
c.) ha infinite soluzioni.
d.) Non si può dire, dipende da A.

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, e 5 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 6, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.