Matematica Discreta I

Esame del 07-04-2008

Esercizio 1.

Sia $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_4 - 6x_5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 9x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 8x_5 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

a.) Trovare una base di $Ker(F)$. (4 pt)
b.) Trovare una base di $Im(F)$. (4 pt)
c.) E' $\vec{v} \in Im(F)$? (1 pt)

Esercizio 2.
Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare, e la base naturale di $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, dove F è dato dalla matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a.) Dimostrare che $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. (1 pt)
b.) Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$. (3 pt)
c.) Scrivere la relazione che lega la matrice $[F]_e^e$ con $[F]_b^b$ e calcolare $[F]_b^b$. (3 pt)
d.) Sia $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$. Trovare $F^{123456789}(\vec{v})$. (1 pt)

Esercizio 3.
Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il piano $\pi_1 : x + 2y - 3z = 6$, la retta $l = \begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= 3 - t \\ z &= 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, e il punto $P = (1, 2, 1)$.
a.) Dimostrare che la retta l è contenuta nel piano π_1. (1 pt)
b.) Calcolare la distanza tra il punto P e il piano π_1. (2 pt)
c.) Trovare l'equazione cartesiana del piano perpendicolare a π_1 che contiene il punto P e interseca π_1 in una retta paralello ad l. (3 pt)

Esercizio 4.
Sia $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di anglo $\frac{\pi}{2}$ in senso anti-orario e sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta $x - y = 0$.
a.) Trovare la matrice della applicazione lineare $R^{-1} \circ T \circ R$. (1 pt)
b.) Stabilire se $R^{-1} \circ T \circ R$ è una riflessione, rotazione o nessuno dei due. (1 pt)

Esercizio 5. (2 pt)
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $T^2(\vec{v}) = \vec{0}$ per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
Dimostrare che esiste una base b di $\mathbb{R}^3$ e $a \in \{0, 1\}$ tale che $[T]_b^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6. (3 pt)
6.1. Sia $s \in \mathbb{R}$ e siano $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ s \\ s \end{pmatrix}$. Allora $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente independenti

a.) se e solo se $s \neq 0, 1$. b.) se e solo se $s \neq 1$. c.) se e solo se $s \neq 0$. d.) nessune delle risposte date.

6.2. In $\mathbb{R}^2$ la rette $2x + y = 5$ e la retta $\begin{cases} x = & 3 + 2t \\ y = & 5 - 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, sono

a.) uguali. b.) paralelle e diverse. c.) perpendicolari. d.) nessuna della precedenti.

6.3. Stabilire se le affermazioni sono vero o falso.

A. L'applicazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è lineare.

B. Siano $\vec{u}$, $\vec{v}$ $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Se $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sono linearmente dipendenti, allora $\vec{u} = k\vec{v} + l\vec{w}$, per certi $k, l \in \mathbb{R}$.

a.) A e B sono entrambi vero. c.) A è vero e B è falso.
b.) A e B sono entrambi falso. d.) A è falso e B è vero.

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, e 5 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 6, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.