Matematica Discreta I

Esame del 11-09-2008

Esercizio 1.

Sia $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 + 8x_5 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_5 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 7x_5 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 11x_5 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a.) Trovare una base di $Ker(F)$. (4 pt)
b.) Trovare una base di $Im(F)$. (4 pt)
c.) E' $\vec{v} \in Im(F)$? (1 pt)

Esercizio 2.

Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare, e la base naturale di $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, dove F è dato dalla matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a.) Dimostrare che $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. (1 pt)
b.) Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$. (3 pt)
c.) Scrivere la relazione che lega la matrice $[F]_e^e$ con $[F]_b^b$ e calcolare $[F]_b^b$. (3 pt)
d.) Trovare tutti i $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ con $F^{987654321}(\vec{v}) = \vec{v}$. (1 pt)

Esercizio 3.

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ le rette l e m, dove $l = \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, e $m = \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, e il punto $P = (2, -3, -1)$.

a.) Dimostrare che le rette l e m sono sghembe. (1 pt)
b.) Calcolare la distanza tra la retta l e il punto P. (2 pt)
c.) Trovare l'equazione cartesiano del piano che contiene il punto P e la retta che interseca l e m perpendicularmente. (3 pt)

Esercizio 4.

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare dato da $T : \vec{v} \mapsto \vec{v} - proj_{\vec{w}}(\vec{v})$, dove $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e sia $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta $x - y = 0$.

a.) Trovare la matrice di $S^{-1} \circ T \circ S$. (1 pt)
b.) Esiste un $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ tale che $(S^{-1} \circ T \circ S)(\vec{v}) = \vec{v} - proj_{\vec{n}}(\vec{v})$, per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$? (1 pt)

Esercizio 5. (2 pt)

Un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice ortogonale se $\langle T(\vec{u}) | T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$, per ogni $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ cioè T conserve il prodotto scalare. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare ortogonale.
Dimostare: F è una riflessione o una rotazione.

Esercizio 6. (3 pt)

6.1. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. I coordinati di $\vec{v}$ rispetto alla la base $b = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ sono:

a.) $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ b.) $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ c.) $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ d.) nessune delle risposte date.

6.2. L'insieme $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$?

a.) Si!
b.) No, perchè $\vec{0} \notin U$.
c.) No, perchè esistono $\vec{v}, \vec{w} \in U$ con $\vec{v} + \vec{w} \notin U$.
d.) No, perchè esistono $\vec{v} \in U$ e $k \in \mathbb{R}$ con $k\vec{v} \notin U$.

6.3. Stabilire se le affermazioni sono vero o falso.

A. Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti, allora $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente indipendenti.
B. Sia $F : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ un'applicazione lineare, allora la dimensione di $ker(F)$ è 2.

a.) A e B sono entrambi vero.
b.) A e B sono entrambi falso.
c.) A è vero e B è falso.
d.) A è falso e B è vero.

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, e 5 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 6, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.