

Matematica Discreta II

Esame del 25-06-2009

Esercizio 1. (3 pt)

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $1369x + 7104y = -407$, con $x, y \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. (5 pt)

Risolvere in \mathbb{Z} il seguente sistema
$$\begin{cases} x \equiv 259 & (\text{mod } 23) \\ 17x \equiv -12 & (\text{mod } 24) \\ x \equiv -116 & (\text{mod } 25) \end{cases}.$$

Esercizio 3. (6 pt)

Consideriamo la ricorrenza $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - \frac{4}{3}n$, per $n \geq 2$.

a. Dimostrare che $a_n = \frac{n}{3} + \frac{2}{3}$, $n \geq 0$, è una soluzione della ricorrenza.

b. Trovare tutte le soluzioni della ricorrenza.

c. Trovare la soluzione con $a_0 = \frac{1}{3}$ e $a_1 = 0$, e calcolare a_0, a_1, a_2 e a_3 usando la ricorrenza e la risposta.

Esercizio 4. (6 pt)

a. Quanti $x \in \mathbb{Z}$ con $20000 \leq x \leq 99999$ esistono con le cifre tutte pari e distinte e con x non divisibile per 4.

b. Quanti numeri $x \in \mathbb{Z}$ con $3528 \leq x \leq 57333$ sono divisibili per 24, 294 o 315.

c. Quante soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 421$, dove $x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, \dots, x_7 \geq 0$, con $5 \leq x_1 \leq 100$, $x_2 \geq 20$, $x_4 \geq 40$, $99 \leq x_7 \leq 200$, $x_1 \neq x_7$.

Esercizio 5. (5 pt)

Quanti bit string di lunghezza 25 ci sono tali che

a. il bit string corrispondente alle prime dodici posizioni contiene esattamente sette 0.

b. il bit string ha almeno quattordici 0 e almeno nove 1, inoltre si deve avere che il bit string corrispondente alle prime nove posizioni contiene esattamente sei 1 e il bit string corrispondente alle ultime undici posizioni contiene al massimo due 1.

c. il bit string corrispondente alle prime sette posizioni contiene esattamente tre 1 e il bit string corrispondente alle ultime quindici posizioni contiene lo string 1100011 come sotto-string.

Esercizio 6. (2 pt)

Quanti anagrammi si possono fare con la parola NINEINCHNAILS tali che nessuna delle lettere I ed E si trovi nella parola nuova nello stesso posto che occupava nella parola originale.

Esercizio 7. (3 pt)

7.1 Il numero $(888000777000666000555000444000333000222000111)_9$ è

(A) divisibile per 10 ma non per 13,

(C) divisibile per 10 e per 13,

(B) divisibile per 13 ma non per 10,

(D) non divisibile nè per 10, nè per 13.

7.2 Il coefficiente davanti ad x^{27} in $(7 - \frac{x}{28})^{60}$ è

(A) $7^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{27} \binom{60}{27}$, (B) $7^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{54} \binom{60}{33}$, (C) $-7^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{54} \binom{60}{33}$, (D) $-7^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{27} \binom{60}{27}$.

7.3 Per quale dei seguenti n la terna $(n, e = 241, d = 2161)$ costituisce la chiave (pubblica e segreta) di un codice RSA ?

(A) $n = 1205$,

(B) $n = 20471$,

(C) $n = 10805$,

(D) $n = 520801$.

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5 e 6 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 7, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorrettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.