

Matematica Discreta II

Esame del 23-07-2009

Esercizio 1. (3 pt)

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $6222x - 1496y = 408$, con $x, y \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. (5 pt)

Risolvere in \mathbb{Z} il seguente sistema
$$\begin{cases} x \equiv 331 \pmod{27} \\ 15x \equiv -11 \pmod{28} \\ x \equiv -167 \pmod{29} \end{cases}.$$

Esercizio 3. (6 pt)

Consideriamo la ricorrenza $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + \frac{9}{4}n + 3$, per $n \geq 2$.

a. Dimostrare che $a_n = \frac{n}{4} + 1$, $n \geq 0$, è una soluzione della ricorrenza.

b. Trovare tutte le soluzioni della ricorrenza.

c. Trovare la soluzione con $a_0 = 0$ e $a_1 = \frac{5}{4}$, e calcolare a_0 , a_1 , a_2 e a_3 usando la ricorrenza e la risposta.

Esercizio 4. (6 pt)

a. Quanti $x \in \mathbb{Z}$ con $200000 \leq x \leq 999999$ esistono con le cifre dispari distinte, una sola cifra pari e x divisibile per 4.

b. Quanti numeri $x \in \mathbb{Z}$ con $61710 \leq x \leq 125842$ sono divisibili per 66, 260 o 605.

c. Quante soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 800$, dove $x_1, \dots, x_8 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, \dots, x_8 \geq 0$, con $50 \leq x_1 \leq 200$, $x_4 \geq 75$, $25 \leq x_8 \leq 200$ e $x_2 + x_4 + x_6 + x_8 \neq x_1 + x_3 + x_5 + x_7$.

Esercizio 5. (5 pt)

Quanti bit string di lunghezza 30 ci sono tali che

a. il bit string corrispondente alle ultime dieci posizioni contiene esattamente sette 0.

b. il bit string ha esattamente diciassette 1, inoltre si deve avere che il bit string corrispondente alle prime undici posizioni contiene almeno otto 0 e il bit string corrispondente alle ultime quindici posizioni contiene al massimo dodici 1.

c. il bit string corrispondente alle prime undici posizioni contiene esattamente cinque 0 e il bit string corrispondente alle ultime quindici posizioni non contiene lo string 10100101 come sotto-string.

Esercizio 6. (2 pt)

Un ternary string di lunghezza n è una parola di n lettere nell'alfabeto $\{0, 1, 2\}$. Quanti ternary string di lunghezza 10 ci sono che contengono le string 10 o 20 come sotto-string.

Esercizio 7. (3 pt)

7.1 Il numero 1010102020203030304040404040303030202020101010 è

(A) divisibile per 101 ma non per 7,

(C) divisibile per 101 e per 7,

(B) divisibile per 7 ma non per 101,

(D) non divisibile nè per 101, nè per 7.

7.2 Il coefficiente davanti ad x^{50} in $(5 - \frac{x}{55})^{82}$ è

(A) $-5^{18} (\frac{1}{11})^{50} \binom{82}{50}$, (B) $5^{18} (\frac{1}{11})^{50} \binom{82}{50}$, (C) $(\frac{1}{5})^{18} (\frac{1}{11})^{50} \binom{82}{32}$, (D) $-(\frac{1}{5})^{18} (\frac{1}{11})^{50} \binom{82}{32}$.

7.3 Il resto della divisione di 191^{54321} per 63 è:

(A) 2,

(B) 4,

(C) 8,

(D) 16.

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5 e 6 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 7, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorrettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.