

Matematica Discreta II

Esame del 23-09-2010

Esercizio 1. (3 pt)

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $-4514x + 8103y = 925$, con $x, y \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. (5 pt)

Risolvere in \mathbb{Z} il seguente sistema
$$\begin{cases} x \equiv 178 \pmod{21} \\ -17x \equiv 13 \pmod{22} \\ x \equiv 257 \pmod{23} \end{cases}.$$

Esercizio 3. (6 pt)

Consideriamo la ricorrenza $a_n = -3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2n + \frac{5}{3}$, per $n \geq 2$.

a. Dimostrare che $a_n = \frac{n+2}{3}$, $n \geq 0$, è una soluzione della ricorrenza.

b. Trovare tutte le soluzioni della ricorrenza.

c. Trovare la soluzione con $a_0 = -\frac{1}{3}$ e $a_1 = 1$, e calcolare a_0 , a_1 , a_2 e a_3 usando la ricorrenza e la risposta.

Esercizio 4. (6 pt)

a. Quanti $x \in \mathbb{Z}$ con $11111 \leq x \leq 99999$ esistono con le cifre pari distinte e x divisibile per 4.

b. Quanti numeri $x \in \mathbb{Z}$ con $1560 \leq x \leq 13260$ sono divisibili per 24, 70 o 195.

c. Quante soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 800$, dove

$$x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{Z} \text{ e } x_1, \dots, x_6 \geq 0, \text{ con } 100 \leq x_1 \leq 201, x_3 \geq 60, x_5 \geq 40, \\ 200 \leq x_6 \leq 300 \text{ e } x_1 \neq x_6.$$

Esercizio 5. (5 pt)

Quanti bit string di lunghezza 30 ci sono tali che

a. il bit string corrispondente alle prime venti posizioni contiene esattamente due 0.

b. il bit string ha almeno venti 0 e almeno sette 1, inoltre si deve avere che il bit string corrispondente alle prime dieci posizioni contiene otto 0 e il bit string corrispondente alle ultime quindici posizioni contiene almeno cinque 1.

c. il bit string corrispondente alle prime nove posizioni contiene esattamente sei 1 e il bit string corrispondente alle ultime quindici posizioni contiene lo string 0100001 come sotto-string.

Esercizio 6. (2 pt)

Quanti anagrammi si possono fare con la parola VALOROSENILDI tali che nessuna delle lettere I, S e V si trovi nella parola nuova nello stesso posto che occupava nella parola originale.

Esercizio 7. (3 pt)

7.1 Il numero $(111000222000333000444444000333000222000111)_9$ è

(A) divisibile per 10 ma non per 13,

(C) divisibile per 10 e per 13,

(B) divisibile per 13 ma non per 10,

(D) non divisibile né per 10, né per 13.

7.2 Il coefficiente davanti ad x^{21} in $(55 - \frac{x}{121})^{45}$ è

$$(A) 5^{24} \left(\frac{1}{11}\right)^{42} \binom{45}{21}, \quad (B) 5^{24} \left(\frac{1}{11}\right)^{21} \binom{45}{24}, \quad (C) -5^{21} \left(\frac{1}{11}\right)^{24} \binom{45}{21}, \quad (D) -5^{24} \left(\frac{1}{11}\right)^{18} \binom{45}{24}.$$

7.3 Il resto della divisione di 235^{12345} per 57 è:

(A) 1,

(B) 2,

(C) 3,

(D) 4.

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5 e 6 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 7, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorrettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.