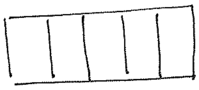
Pigeon hole principle

esempio



5 bucci

6 piccioni

se 6 piccioni devono dormire in 5 bucci allora ci sarà almeno 1 bucco con almeno 2 piccioni

In generale:

Pigeon hole principle
Se $k+1$ oggetti devono essere messo in k scatole allora ci sarà almeno una scatola con almeno due oggetti.

Esempi
In un gruppo di 367 persone ci saranno almeno due che celebrano loro compleano lo stesso giorno

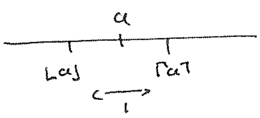
In ogni insieme di 27 parole Italiano ci sono almeno due che cominciano con la stessa lettera

Esempio: se 11 piccioni devono dormire in 5 bucci allora ci sarà almeno 1 bucco con 3 piccioni

Def Sia $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.
$\lfloor a \rfloor$ = l'intero non negativo più grande $\leq a$
$\lceil a \rceil$ = l'intero non negativo più piccolo $\geq a$

Quindi se $a \in \mathbb{N}$ $\lfloor a \rfloor = a = \lceil a \rceil$ e $a-1 < \lfloor a \rfloor \leq a \leq \lceil a \rceil < a+1$

se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, con $a \geq 0$



e $a-1 < \lfloor a \rfloor < a < \lceil a \rceil < a+1$

Generalized Pigeonhole principle
Se N oggetti devono essere messo in k scatole allora ci sarà almeno una scatola con almeno $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ oggetti.

Dim: Supponiamo che ogni scatola ha al massimo $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ oggetti. Allora ci sono al massimo $k \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right) < k \left(\left(\frac{N}{k} + 1 \right) - 1 \right) = N$ oggetti

una contraddizione.

Esempio se prendiamo $n+1$ interi diversi da $\{1, 2, \dots, 2n\}$, allora esistono tra questi due a e b con $a | b$ (e $a \neq b$)

Dim: siano $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ con $0 < a_i \leq 2n$ $i = 1, \dots, n+1$

Possiamo supporre che $a_i \leq a_j$ se $i < j$. Cioè $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1} \leq 2n$

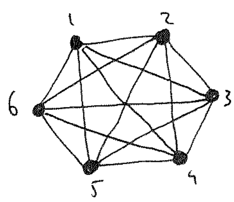
Scriviamo $a_i = 2^{k_i} q_i$ con q_i dispari $1 \leq i \leq n+1$

Allora $1 \leq q_i < 2n$. Tra 1 e $2n$ ci sono solo n interi dispari, ne ho $n+1$. quindi esistono r, s, con $q_r = q_s$ e $r < s$. Scriviamo $q = q_r = q_s$

Allora $a_r = 2^{k_r} q_r = 2^{k_r} q$, $a_s = 2^{k_s} q_s = 2^{k_s} q$. $r < s$ quindi $a_r \leq a_s$

cioè $k_r \leq k_s$. Quindi $a_r | a_s$.

Esempio

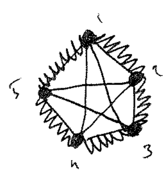


se coloriamo i lati con due colori, diciamo A e B, tale che ogni lato ha un colore unico. Allora esiste un triangolo di colore A o colore B.

Dim: consideriamo i lati del punto 6: 16, 26, 36, 46, 56. Questi sono colorati con due colori quindi al meno 3 hanno lo stesso colore. Possiamo suppore che 16, 26, 36 hanno lo stesso colore, diciamo A

Consideriamo il triangolo $\triangle_{3}^{1\;\;2}$. se c'è un lato di colore A allora esiste un triangolo di colore A che contiene il punto 6. se non c'è un lato di colore A, allora questo è un triangolo di colore B.

OSS Per 5 punti questo non è vero:



$\sim\sim$: A non c'è né né $\triangle$

— : B

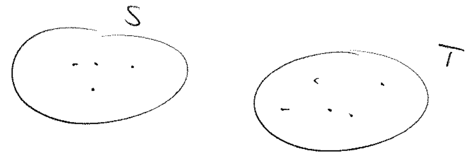
Combinatoria

Def Sia S un insieme con un numero finito di elementi. Scriviamo $|S|$ per il numero di elementi.

Principio della Somma

Siano S e T due insiemi con $|S| = n$ e $|T| = m$.

Se $S \cap T = \emptyset$ allora $|S \cup T| = n + m$



esempi:

1) Quanti interi x, con $3 \leq x \leq 20$ ci sono tale che x è pari o un numero primo?

sia $S = \{ x \mid 3 \leq x \leq 20,\ x \text{ pari} \} = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ $\quad |S| = 9$

$T = \{ x \mid 3 \leq x \leq 20,\ x \text{ primo} \} = \{3, 5, 7, 13, 17, 19\}$ $\quad |T| = 7$

La soluzione è il numero di elementi $= S \cup T$. $S \cap T = \emptyset$, quindi $|S \cup T| = 7 + 9 = 16$

2) Quanti sono i modi di pescare un asso o un re da un mazzo di 52 carte?

sia $S = \{ x \mid x \text{ è un asso} \}$, $T = \{ y \mid y \text{ è un re} \}$. Allora $|S| = |T| = 4$

e $S \cap T = \emptyset$ Quindi $|S \cup T| = 4 + 4 = 8$.

OSS Se $S_1, \dots, S_n$ sono insiemi due a due disgiunti (cioè $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$)

allora $|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n|$

si ha bisogno di $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ non è sufficiente:

$S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{4, 5\}$, $S_3 = \{2, 4\}$. Allora $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$ e

$S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad |S_1 \cup S_2 \cup S_3| = 5 \neq 3 + 2 + 2 = |S_1| + |S_2| + |S_3|$

Def Siano S e T due insiemi. Il prodotto cartesiano di S e T è l'insieme

$$S \times T = \{ (s, t) \mid s \in S \text{ e } t \in T \}.$$

Principio del prodotto.

Siano S e T due insiemi con $|S| = n$ e $|T| = m$

Allora $|S \times T| = n \cdot m$

$(\cdot , \cdot)$

n scelte sul primo posto

m scelte sul secondo posto.

Esempio: In un'aula le sedie devono essere etichettati con una lettera e un intero positivo ≤ 100. Quanti etichetti diversi si può fare?

una etichetta : (lettera , numero)

sia $S = \{A, B, \dots, Z\}$, $T = \{1, 2, \dots, 100\}$, Allora una etichetta è un elemento di $S \times T$. $|S \times T| = 26 \cdot 100 = 2600$. ci sono 2600 etichette diversi

Oss Siano $S_1, \dots, S_m$ insiemi con $|S_1| = n_1$, $|S_2| = n_2$, ..., $|S_m| = n_m$. e sia il prodotto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m = \{(s_1, s_2, \dots, s_m) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_m \in S_m\}$

Allora $|S_1 \times \dots \times S_m| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$

Esempio: In un ristorante si può pranzare scegliendo di un menu. Ci sono 2 antipasti, 6 primi, 4 secondi, 2 contorni, 3 vini e 3 dolci.

Quanti pranzi completi distinti si può fare?

sia $S_1 = \{\text{antipasti}\}$, $S_2 = \{\text{primi}\}$, $S_3 = \{\text{secondi}\}$, $S_4 = \{\text{contorni}\}$, $S_5 = \{\text{vini}\}$

$S_6 = \{\text{dolci}\}$. Un pranzo completo è un elemento di $S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4 \times S_5 \times S_6$

$|S_1| = 2$, $|S_2| = 6$, $|S_3| = 4$, $|S_4| = 2$, $|S_5| = 3$, $|S_6| = 3$.

$|S_1 \times \dots \times S_6| = 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 864$. ci sono 864 pranzi completi

In quanti modi si può pranzare?

(antipasto , primo , secondo , contorno , vino , dolci)

$3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 - 1 = 5039$

Esempi:

- Quanti bitstring di lunghezza 7 ci sono? $\underset{2}{\cdot}\ \underset{2}{\cdot}\ \underset{2}{\cdot}\ \underset{2}{\cdot}\ \underset{2}{\cdot}\ \underset{2}{\cdot}\ \underset{2}{\cdot}$ $2^7 = 128$
- Quanti targhe Italiane ci sono?

  una targa è del tipo: LLNNNLL dove L è una lettera e N un numero con $0 \le N \le 9$. Quindi corrisponde a (L, L, N, N, N, L, L)

  ci sono $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 \cdot 10^3 = 456.976.000$ targhe diversi
- Sia S un insieme finito, con $|S| = n$. Quanti sottoinsiemi ci sono?

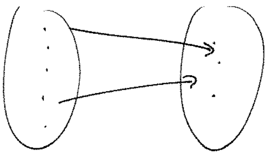
  Scriviamo gli elementi di S in un ordine: $s_1, s_2, \dots, s_n$. Sia A l'insieme dei bit string di lunghezza n. c'è un'applicazione biunivoca tra $P(S)$ e A : $T \subseteq S$

  $T \longmapsto$ bitstring: sul posto i c'è 0 se $s_i \notin T$, 1 se $s_i \in T$.

  Quindi $|P(S)| = |A|$. ma $|A| = 2^n$. Quindi $|P(S)| = 2^n$.

- Siano S e T due insiemi con $|S| = n$ e $|T| = m$.

Quanti funzioni ci sono da S a T?



S T

ordiniamo gli elementi di S: $s_1, s_2, \dots, s_n$

$$f \longmapsto (f(s_1), f(s_2), \dots, f(s_n))$$

ogni funzione corrisponde ad esattamente un n-upla $\in T$

cioè un elemento di $\underbrace{T \times \dots \times T}_{n}$. $|T \times \dots \times T| = m^n$

Quindi ci sono m^n funzioni da S a T.

Quanti di questi sono iniettiva? cioè $f(s_i) \neq f(s_j)$ se $i \neq j$ $1 \leq i, j \leq n$.

se $n > m$ nessuno.

se $n \leq m$: $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-(n-1)) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

- Su un computer un password deve avere 6, 7 o 8 caratteri tale che ogni carattere è una lettera (minuscolo) o una cifra. Ogni password deve contenere almeno una cifra. Quanti password diversi ci sono?

sia P l'insieme dei password.

sia P_6 l'insieme dei password di lunghezza 6

sia P_7 l'insieme dei password di lunghezza 7

sia P_8 l'insieme dei password di lunghezza 8

Allora $P = P_6 \cup P_7 \cup P_8$, $P_6 \cap P_7 = P_7 \cap P_8 = P_6 \cap P_8 = \emptyset$ $|P| = |P_6| + |P_7| + |P_8|$

P_6 : $\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ ho 6 posizioni su ogni possizione posso mettere $26 + 10 = 36$ caratteri. Quindi ci sono $(36)^6$ password, ma non tutti sono ammessibile. ci sono $(26)^6$ password che hanno solo lettere. Quindi $(36)^6 - (26)^6$ password di lunghezza 6 con almeno una cifra.

simile $|P_7| = (36)^7 - (26)^7$ $|P_8| = (36)^8 - (26)^8$

Quindi $|P| = (36)^6 - (26)^6 + (36)^7 - (26)^7 + (36)^8 - (26)^8 = 2\,684\,483\,063\,360$

Più "formale": sia A l'insieme delle lettere, C l'insieme delle cifre,

allora $|A| = 26$ $|C| = 10$ $A \cap C = \emptyset$ $|A \cup C| = 36$

$P_6 = (A \cup C) \times (A \cup C) \times (A \cup C) \times (A \cup C) \times (A \cup C) \times (A \cup C) \setminus C \times C \times C \times C \times C \times C$

Quindi $|P_6| = |A \cup C|^6 - |C|^6 = (36)^6 - (26)^6$.

simile P_7 e P_8.

- Quanti bit string di lunghezza 8 ci sono che cominciano con un 1 o terminano con 00?

Bit string che cominciano con 1 : 1 . . . . : $2^7 = 128$

Bit string che terminano con 00 : . . . . . . 00 : $2^6 = 64$

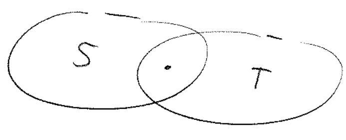
Però quelli che cominciano con 1 e terminano con 00 ho contato due volte

Bit string che cominciano con 1 e terminano con 00 : 1 . . . . . 00 : $2^5 = 32$

Quindi ci sono $128 + 64 - 32 = 160$ che cominciano con un 1 o terminano con 00.

In termini di insiemi:

Siano S e T due insiemi finiti. Allora



$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.

- Quanti bit string di lunghezza 8 ci sono che o cominciano con un 1 o terminano con 00?

S = { bit string che cominciano con 1 }   T = { bit string che terminano con 00 }

cerco $S \Delta T = S \setminus T \cup T \setminus S$

$|S \Delta T| = |S \setminus T| + |T \setminus S| = |S| - |S \cap T| + |T| - |S \cap T| = |S| + |T| - 2|S \cap T|$

$= 128 + 64 - 2 \cdot 32 = 128$

- Palindromi : i topi non avevano nipoti

Dammit I'm mad

gad nee poezie zei ze op een dag

non

otto

onorarono

Quanti palindromi di una parola di lunghezza n ci sono?

ci sono 26 lettere : $26^{n/2}$ se n è pari, $26^{n+1/2}$ se n è dispari

- CAP : . . . . . 5 cifre

$\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5}$ ↷ $\boxed{ϛ\ ㄣ\ Ɛ\ ᄅ\ Ɩ}$ Quanti rimangono uguali? : 75

1 8 0

2 3 4 5 7

6 9

Def. Sia S un insieme. Una permutazione su k elementi di S (o k-permutazione) è una funzione iniettiva di $K = \{1, 2, \dots, k\}$ in S.

Alla funzione iniettiva $f: K \to S$ si associa il k-upla $(f(1), f(2), \dots, f(k)) \in S \times \dots \times S$; cioè un sottoinsieme ordinato di k elementi di S.

Esempio: $S = \{a, b, c, d\}$

Alcune 3-permutazioni di S: abc bcd cbd

Alcune 4-permutazioni di S: abcd bacd dcba

Esempio $S = \{a, b, c\}$

le 3-permutazioni sono: abc acb bac bca cab cba

Def Se $|S| = n$ una n-permutazione viene detta semplicemente permutazione di S

Teorema Il numero di k-permutazioni di un insieme di n elementi è $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. Questo numero viene denotato con $P(n, k)$

Dim: consideriamo le k-permutazioni : $\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \cdots\ \bullet}_{k \text{ posti}}$

ci sono n scelte per il primo posto

ci sono $n-1$ scelte per il secondo posto

$\vdots$

ci sono $n-(k-1)$ scelte per il k-esimo posto.

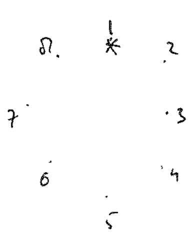
Oss. 1) $P(n, k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

2) $P(n, n) = n!$, il numero di permutazioni di un insieme di n elementi

Esempio: Una commisione di 12 persone deve scegliere 3 persone per farne una presidente, un vice presidente e uno secretario. Una persona non può ricoprire più ruoli. In quanti modi si può fare?

$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

Esempio: Un rappresentante deve visitare 8 città. Deve comminciare in una città spesificato e deve visitare ogni città una volta. In quanti modi può fare le visite?



$7! = 5040$

"Traveling sales man problem" : minimalizzare la distanza/costo del viaggio.

Esempio Si ha a disposizione 6 sedie, di modello diversi, e 9 colori. In quanti modi si può dipingere le sedi quando tutti devono avere un colore diverso?

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$

E quando le sedie possono avere lo stesso colore?

$9^6 = 531441$

E quando due devono essere bianco e quattro devono essere nero?

$6 \cdot 5/2 = 15$

Def Sia S un insieme. Una k-combinazione di S è un sotto insieme (non ordinato) di k elementi di S.

Esempio $\{1,3,4\}$ è un 3-combinazione di $\{1,2,3,4\}$.

Teorema Il numero di k-combinazioni di un insieme di n elementi è
$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$
Questo numero viene denotato con $C(n,k)$ o $\binom{n}{k}$

Dim. 1) Ogni k-permutazione può essere ottenuto in modo unico da prima prendere un k-combinazione e poi ordinare gli elementi.
Quindi $P(n,k) = C(n,k) \cdot P(k,k)$. cioè $\frac{n!}{(n-k)!} = C(n,k) \cdot k!$

2) Ogni k-combinazione può essere ottenuto in $P(k,k)$ modi da una k-permutazione. Quindi $C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k,k)}$. cioè $C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

OSS $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ (attenzione $0! = 1$)

Esempio. Sia S un insieme di 15 elementi
il numero di 3-combinazioni di S è $\binom{15}{3} = \frac{15!}{12!\,3!} = 455$
il numero di 12-combinazioni di S è $\binom{15}{12} = \frac{15!}{3!\,12!} = 455$

cioè: se devo scegliere 12 da 15 posso anche prendere tutti e buttare 3.

OSS Se $0 \le k \le n$ allora $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dim scegliere k da n = buttare $n-k$ da n.

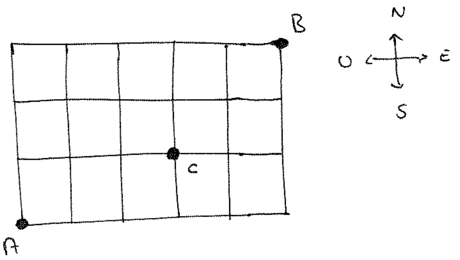
Esempi

- In quanti modi si può scegliere 5 giocatori da una squadra di 10?

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

- In quanti modi si può formare una commissione d'esame se la commissione deve avere 5 membri tra cui 2 di informatica e 3 di matematica.
Ci sono 5 informatici e 20 matematici disponibile.

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{20}{3} = 11400$$

- 

Ecco la pianta di una città. Le strade sono a senso unico. Si può solo viaggiare in direzione est e nord.

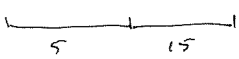
a) In quanti modi puoi andare da A a B?
b) In quanti modi puoi andare da A a B, se devi passare via C?
c) In quanti modi puoi andare da A a B e evitare C?

a) Per arrivare da A a B devi fare 5 volte est e 3 volte nord.
Quindi una strada da A a B è una parola di lunghezza 8 nelle lettere e (est) e n (nord). Le parole devono avere 5 e e 3 n
Quindi ci sono $\binom{8}{3} = 56$ (alternativa $\binom{8}{5} = 56$)

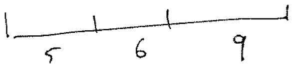
b) Da A a C : 4 passi 3 e, 1 n quindi $\binom{4}{1} = 4$
Da C a B : 4 passi 2 e, 2 n quindi $\binom{4}{2} = 6$
Da A a B via C: $\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2} = 4\cdot 6 = 24$.

c) Tutti meno quelli che passano da C : $56 - 24 = 32$.

- Quanti bitstring di lunghezza 20 ci sono con
a) esattamente tre zeri sui primi 5 posti.
b) esattamente due zeri sui primi 5 posti e esattamente quattro uno sui ultimi 9 posti.

a) 

$\binom{5}{3}\cdot 2^{15} = 327680$

b) 

$\binom{5}{2}\cdot 2^{6}\cdot\binom{9}{4} = 80640$

- Quanti bit string di lunghezza 21 ci sono tale che
  a) il bit string corrispondente alle prime 10 posizioni contiene al massimo due 0?
  b) il bit string contiene esattamente 13 zeri e il bit string corrispondente alle prime 7 posizioni contiene al massimo 2 zeri e il bit string corrispondente alle ultimi 8 posizioni contiene esattamente 2 uno?
  c) il bit string corrispondente alle prime 7 posizioni contiene esattamente 3 uno e il bit string corrispondente alle ultime 5 posizioni non contiene lo sottostring 110

a) 10 | 11 $\quad \left[\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}\right] \cdot 2^{11} = (1+10+45) \cdot 2^{11} = 114688$

b) 7 | 6 | 8 $\quad \left[\binom{7}{1}\binom{6}{6}+\binom{7}{2}\binom{6}{5}\right]\binom{8}{6} = (7+126) \cdot 28 = 3724$

c) 7 | 9 | 5 $\quad \binom{7}{3} \cdot 2^9 \cdot \left[2^5 - \binom{3}{1} \cdot 2^2\right] = 358400$

- Quanti bit string di lunghezza 6 ci sono che contengono
  a) lo string 110 come sotto string?
  b) Lo string 101 come sotto string?

a) 6 $\quad \binom{4}{1} \cdot 2^3 - 1 = 31$

b) 6 $\quad \binom{4}{1} \cdot 2^3 - \binom{2}{1} \cdot 2 - 1 = 27$

Propietà di $\binom{n}{k}$

$\binom{n}{k}$ si dice anche coefficiente binomiale.

$(x+y)^1 = x + y$

$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$

$= x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3$

Teorema binomiale

Siano x, y due variabile e n un intero positivo allora

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Dim. scriviamo $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j} y^j$, dobbiamo calcolare a_j

$(x+y)^n = (x+y)(x+y) \cdots (x+y) =$ .... (in ordine)

ogni termine è una parola di lunghezza n in x e y dove x e y sono in ordine.

e ogni parola possibile in x e y è un termine. Per avere $x^{n-j} y^j$ devo scegliere $n-j$ volte x e j volte y. Se ho scelto le j y's allora per forza gli altri sono x. Ci sono $\binom{n}{j}$ parole con esattamente j y's.

Quindi $a_j = \binom{n}{j}$.

Esempio. Il coefficiente davanti $x^3 y^7$ in $(x+y)^{10}$ è $\binom{10}{3}$

Il coefficiente davanti $x^3 y^7$ in $(2x-y)^{10}$ è $-2^3 \binom{10}{3}$

Il coefficiente davanti $x^5 y^7$ in $(2x - \frac{1}{4} y)^{12}$ è $-(\frac{1}{2})^9 \binom{12}{5}$

Oss 1) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$

2) $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$

Dim 1) $2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1)^{n-j} (1)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$

2) $0 = (1+(-1))^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1)^{n-j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$.

Ci sono tante altre formule, per esempio

L'identità di Pascal

Siano n, k interi positivi con $n \geq k$, allora $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Dim. Sia T un insieme di $n+1$ elementi. Contiamo il numero di $R \subseteq T$ con $|R| = k$ in due modi diversi.

Il numero di k-sottoinsiemi di T è $\binom{n+1}{k}$.

Sia $a \in T$ e definiamo $S = T \setminus \{a\}$. Sia R un k-sottoinsieme di T.

Allora ci sono due possibilità: $a \notin R$ o $a \in R$.

Supponiamo che $a \notin R$ allora R è un k-sottoinsieme di S e ogni k-sottoinsieme di S è un k-sottoinsieme di T che non contiene a.

Quindi ci sono $\binom{n}{k}$ di questi.

Supponiamo che $a \in R$. Sia $R' = R \setminus \{a\}$. Allora R' è un $(k-1)$-sottoinsieme di S. Se R' è un $(k-1)$-sottoinsieme di S allora $R' \cup \{a\}$ è un k-sottoinsieme di T che contiene a. Quindi ci sono $\binom{n}{k-1}$ k-sottoinsiemi di T che contengono a.

Perciò ci sono $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ k-sottoinsiemi di T.

Abbiamo
$$\begin{matrix} \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} \\ & \binom{n+1}{k} & \end{matrix}$$

Il triangolo di Pascal:

$$\begin{matrix}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{matrix}$$

L'identità di Vandermonde

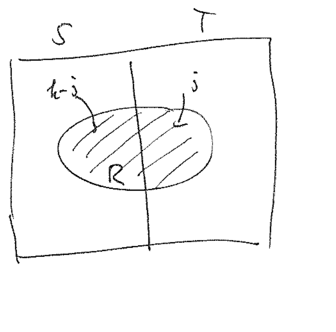
Siano m, n, k interi non negativi con $n \geq k$ e $m \geq k$. Allora

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j}\binom{n}{j}$$

Dim. Siano S e T due insiemi disgiunti con $|S| = m$ e $|T| = n$.

Contiamo il numero di k-sottoinsiemi di $S \cup T$ in due modi diversi.

Il numero di k-sottoinsiemi di $S \cup T$ è $\binom{m+n}{k}$.



Sia R un k-sottoinsieme di $S \cup T$.

Esiste un $0 \leq j \leq k$ con $|R \cap S| = k - j$ e $|R \cap T| = j$.

Allora $R = (R \cap S) \cup (R \cap T)$.

per ogni $0 \leq j \leq h$ abbiamo che

se S' è un $(h-j)$-sottoinsieme di S e T' è un j-sottoinsieme di T

allora $S' \cup T'$ è un h-sottoinsieme di $S \cup T$ con $(S' \cup T') \cap S = S'$ e $(S' \cup T') \cap T = T'$.

ci sono $\binom{m}{h-j}$ $(h-j)$-sottoinsiemi di S e $\binom{n}{j}$ j-sottoinsiemi di T.

Quindi ci sono $\binom{m}{h-j}\binom{n}{j}$ h-sottoinsiemi di $S \cup T$ che intersecano S in un

$h-j$-sottoinsieme e T in un j-sottoinsieme.

Quindi ci sono $\sum_{j=0}^{h} \binom{m}{h-j}\binom{n}{j}$ h-sottoinsiemi di $S \cup T$.

OSS sia p un numero primo. Allora $\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod p$ per $0 < i < p$

Dim. sia $0 < i < p$, allora $\binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)!\,i!}$ è un multiplo di p

quindi $\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod p$.

OSS sia p un numero primo e $x, y \in \mathbb{Z}$. Allora $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p$.

Dim. $(x+y)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i y^{p-i} \equiv x^p + y^p \pmod p$.

Teorema (piccolo teorema di Fermat)

sia $x \in \mathbb{Z}$ e sia p un numero primo. Allora $x^p \equiv x \pmod p$.

Dim. se $x = 0$ allora $0^p = 0$ quindi $x^p \equiv x \pmod p$.

supponiamo che $x > 0$ e che $(x-1)^p \equiv (x-1) \pmod p$.

Allora $x^p = ((x-1)+1)^p \equiv (x-1)^p + 1^p \equiv x-1+1 \equiv x \pmod p$.

segue dal principio d'induzione che $x^p \equiv x \pmod p$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$

con $x \geq 0$.

supponiamo $x < 0$ allora $x = -m$ per certo $m \in \mathbb{Z}$. e $m > 0$.

se p è dispari $x^p \equiv (-m)^p \equiv (-1)^p (m)^p \equiv (-1) \cdot m^p \equiv (-1) m \equiv -m \equiv x \pmod p$.

se p è pari $x^p \equiv (-m)^p \equiv (-1)^p (m)^p \equiv m^p \equiv m \equiv -m = x \pmod p$ perché $p = 2$.

Permutazioni con repetizioni

Esempio: Quante parole di lunghezza 5 si può fare usando le lettere del alfabeto Inglese?

$\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{5}\ (26)^5$ l'ordine è importante ma una lettera può ripetersi. Questa si dice una 5-permutazione con ripetizione.

OSS Il numero di r-permutazioni con ripetizioni di un insieme di n elementi è n^r.

Combinazioni con ripetizioni

Esempio. Un ladro può prendere 4 banconote da una cassaforte. La cassaforte contiene banconote da €10, €20 e €50 e ha almeno 4 banconote di ogni valore. In quanti modi può prendere 4 banconote?

€10	€20	€50
4	0	0
3	1	0
3	0	1
2	2	0
2	1	1
2	0	2
1	3	0
1	2	1
1	1	2
1	0	2
0	4	0
0	3	1
0	2	2
0	1	3
0	0	4

15 modi diversi

Questa è una 4-combinazione con ripetizioni di un insieme di 3 elementi

come farlo più veloce:
* * * * i 4 banconote.

prima metto quelli di €10, poi €20 e poi €50

3 1 0 diventa * * * / * /

4 0 0 diventa * * * * / /

1 1 2 diventa * / * / * *

Quindi ho 4 * e ho bisogno di 2 / per distinguere tra le 3 tipi
cioè ogni soluzione è una parola di lunghezza $4+2=6$ in 4* e 2/.
Devo scegliere 2 posizioni da 6 per le / (o 4 da 6 per le *). Lo posso fare in

$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$ modi diversi

Esempio: Quanti soluzioni ci sono dell'equazione $x_1+x_2+x_3+x_4=25$ con $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$?

Prima metto x_1 poi x_2 poi x_3 poi x_4. Per distinguere tra le x_i ho bisogno di 3 /

* rappresenta 1, 3 diventa * * *, 2 diventa * * etc.

Quindi $1+2+5+17$ diventa $* / * * / * * * * * / \underbrace{* * \cdots *}_{17}$

ho $25+3=28$ posizioni, devo scegliere 3 per le /. Quindi ci sono $\binom{28}{3}$ soluzioni.

Questa è un esempio di un 25-combinazione con repetizione di un insieme di 4 elementi: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

un r-combinazione con repetizione di un insieme di n elementi: r oggetti presa con repetizione da un insieme di n-elementi. L'ordine non è importante.

Teorema.
Il numero di r-combinazioni con repetizioni di un insieme di n elementi è

$$\binom{n+r-1}{r} \qquad \left(\text{in alternativa } \binom{n+r-1}{n-1}\right).$$

Dim. $\underbrace{\dots}_{\text{tipo 1}} \underbrace{\dots}_{\text{tipo 2}} \dots\dots\dots \underbrace{\dots}_{\text{tipo n}}$ in totale r oggetti

si può pensare ad una r-combinazione con repetizioni di un insieme di n elementi come r * (le r oggetti) e n-1 / (per distinguere i n elementi). Quindi ad una parola di lunghezza n+r-1 in * e / con r * e n-1 /. Vice versa ogni parola corresponde ad una r-combinazione con repetizioni di una insieme di n elementi.

Quindi ci sono $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$ r-combinazioni con repetizioni di un insieme di n elementi.

Esempio Quanti soluzioni ci sono dell'equazione $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 21$ con $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$ con

a) nessun altra restrizione

b) $x_1 \geq 1$

c) $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 2$, $x_4 \geq 2$ e $x_5 \geq 2$

d) $0 \leq x_1 \leq 10$

e) $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 < 4$ e $x_3 \geq 15$

f) $x_1 = 5$ e $x_2 + x_4 = 5$

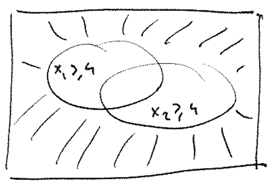
consiglio: non applicare la formula, pensare a * e /

a) ci sono 21 * e 4 / quindi $\binom{25}{4} = 12650$

b) metto una * su x_1, adesso sono libero da fare come mi pare con le 20 *.
Ho 20 *, 4 / quindi $\binom{24}{4} = 10626$

c) metto due * su x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 : rimangono $21 - 10 = 11$ *.
Ho 11 *, 4 / quindi $\binom{15}{4} = 1365$

d) tutte le soluzioni − quelli con $x_1 \geq 11$.
il numero di soluzioni con $x_1 \geq 11$: metto 11 * su x_1, rimangono $21 - 11 = 10$ *
10 *, 4 / quindi $\binom{14}{4} = 1001$
Quindi ci sono $\binom{25}{4} - \binom{14}{4} = 12650 - 1001 = 11649$ soluzioni con $0 \leq x_1 \leq 10$.

e) 

$x_2 \geq 1$
$x_3 \geq 15$

Prima calciamo il numero di soluzioni con $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 15$
metto una * su x_2, 15 * su x_3, rimangono $21 - 16 = 5$ *
ho 5 * 4 / quindi $\binom{9}{4} = 126$ soluzioni

Tra questi ci sono quelli con $x_1 \geq 4$: cioè $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 1$ $x_3 \geq 15$
metto 4 * su x_1 1 * su x_2, 15 * su x_3, rimangono $21 - 20 = 1$ *
ho 1 *, 4 / quindi $\binom{5}{1} = 5$

Tra questi ci sono quelli con $x_2 \geq 4$: cioè $x_2 \geq 4$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 15$
Quindi $x_2 \geq 4$ e $x_3 \geq 15$. metto 4 * su x_2, 15 su x_3 rimangono $21 - 19 = 2$ *
ho 2 *, 4 / quindi $\binom{6}{2} = 15$
Tra questi ci sono quelli con $x_2 \geq 4$ e $x_1 \geq 4$: cioè $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 4$, $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 15$
quindi $x_1 \geq 4$ $x_2 \geq 4$ $x_3 \geq 15$ $15 + 4 + 4 = 23 > 21$ Non è possibile : 0
Quindi ci sono $\binom{9}{4} - \left[\binom{5}{1} + \binom{6}{2} - 0\right] = 126 - [5 + 15 - 0] = 106$ soluzioni

f) metto 5 * su x_1 rimangono $21 - 5 = 16$ * ma questi non posso mettere su x_1.
cioè l'equazione è $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$ $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}$ $x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ e $x_2 + x_4 = 5$
Quindi ho due problemi : $x_2 + x_4 = 5$ $x_2, x_4 \in \mathbb{Z}$ $x_2, x_4 \geq 0$ e $x_3 + x_5 = 11$, $x_3, x_5 \in \mathbb{Z}$ $x_3, x_5 \geq 0$
$x_2 + x_4 = 5$: 5 * 1 / quindi $\binom{6}{1} = 6$ soluzioni
$x_3 + x_5 = 11$: 11 * 1 / quindi $\binom{12}{1} = 12$ soluzioni
Quindi ci sono $\binom{6}{1}\binom{12}{1} = 72$ soluzioni

Permutazioni con oggetti indistinguibili

Esempio: Quante parole diversi posso fare reordinando le lettere della parola SUCCESS? (cioè quanti anagrammi diversi si può fare?)

. . . . ci sono 7 posizioni, ho 3 S, 1 U, 2 C, 1 E

prima metto le 3 S : posso farlo in $\binom{7}{3}$ modi, rimangono $7-3=4$ posizioni libere

poi metto la 1 U : posso farlo in $\binom{4}{1}$ modi, rimangono $4-1=3$ posizioni libere

poi metto le 2 C : posso farlo in $\binom{3}{2}$ modi, rimangono $3-2=1$ posizione libera

poi metto la 1 E : posso farlo in $\binom{1}{1}$ modi.

Quindi $\binom{7}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 420$

Alternativo: prima colorare le lettere, poi dimenticarlo: $\dfrac{7!}{3!\,1!\,2!\,1!} = 420.$

Esempio: Ho 3 orange, 2 banane e 2 mele. Mangio una frutta al giorno. In quanti modi si può mangiare le frutte?

$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2}.$

Esempio: Quanti numeri di 9 cifre si può fare usando le cifre di 100113783?
(un numero non può comminciare con lo 0!)

0 : 2
1 : 3
3 : 2
7 : 1
8 : 1
—
9

Quindi $\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} - \binom{8}{1}\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 15120 - 3360 = 11760$

alternativo $\dfrac{9!}{3!\,2!\,2!} - \dfrac{8!}{3!\,2!} = 11760$

Alternativa: prima gli 0 poi il resto: $\binom{8}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 11760$.

distribuire oggetti distinguibili in scatole distinguibile.

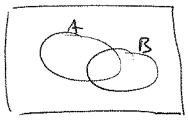
Esempio: In un mazzo di carte ci sono 52 carte. Ci sono 5 giocatore. Ogni giocatore deve avere 7 carte. In quanti modi si può dare le carte.

$\binom{52}{7}\binom{45}{7}\binom{38}{7}\binom{31}{7}\binom{24}{7}$

(alternativa: 5 giocatori e il resto del mazzo di carte $\dfrac{52!}{7!\,7!\,7!\,7!\,7!\,17!}$)

Abbiamo già visto che se A e B sono insiemi finiti allora

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Esempio.

Quanti numeri $x \in \mathbb{Z}$ con $1 \le x \le 1000$ sono divisibili per 6 o 15?

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000 \text{ e } 6 | x\}$ $\quad |A| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000 \text{ e } 15 | x\}$ $\quad |B| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000 \text{ e } 30 | x\}$ $\quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$

Quindi $|A \cup B| = 166 + 66 - 33 = 199$

Esempio

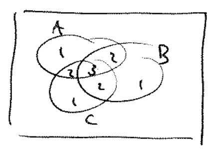
Quanti numeri $x \in \mathbb{Z}$ con $1 \le x \le 1000$ sono divisibili per 7, 11 o 13?

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 7 | x\}$ $\quad |A| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$

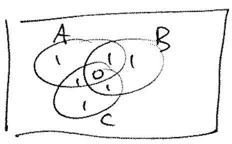
$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 11 | x\}$ $\quad |B| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 13 | x\}$ $\quad |C| = \left\lfloor \frac{1000}{13} \right\rfloor = 76$

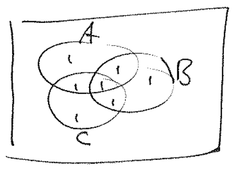
Cerchiamo $|A \cup B \cup C|$



$|A| + |B| + |C|$



$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$



$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A \cap B| = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 77 | x\}$ $\quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$

$|A \cap C| = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 91 | x\}$ $\quad |A \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{91} \right\rfloor = 10$

$|B \cap C| = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 143 | x\}$ $\quad |B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{143} \right\rfloor = 6$

$|A \cap B \cap C| = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 1001 | x\}$ $\quad |A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{1001} \right\rfloor = 0$

Quindi $|A \cup B \cup C| = 142 + 90 + 76 - 12 - 10 - 6 + 0 = 280$.

Esempio.

Da una indagine fra 100 persone su loro preferenze di verdure risulta che

a 45 persone piacciono gli spinaci
53 persone piacciono le fave
55 persone piacciono i cavolini di Bruxelles
28 persone piacciono gli spinaci e le fave
32 persone piacciono gli spinaci e i cavolini di Bruxelles
35 persone piacciono le fave e i cavolini di Bruxelles
20 persone piacciono gli spinaci, le fave e i cavolini di Bruxelles

A quale persone non piacciono queste 3 verdure?

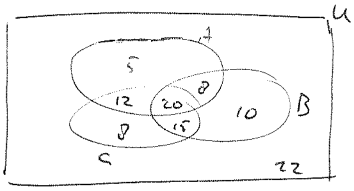
$A = \{ ☺ \text{ spinaci} \}$ $\quad B = \{ ☺ \text{ fave} \}$ $\quad C = \{ ☺ \text{ cavolini di Bruxelles} \}$

Allora $|A| = 45$, $|B| = 53$, $|C| = 55$, $|A \cap B| = 28$, $|A \cap C| = 32$, $|B \cap C| = 35$, $|A \cap B \cap C| = 20$

Quindi $|A \cup B \cup C| = 45 + 53 + 55 - 28 - 32 - 35 + 20 = 78$

Quindi a $100 - 78 = 22$ persone non piacciono questi 3 verdure.

OSS posso farlo anche con il diagramma di Venn, calcolando il numero di elementi in ogni sotto insieme



Il principio d'inclusione - esclusione

Siano $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ insiemi finiti. Allora

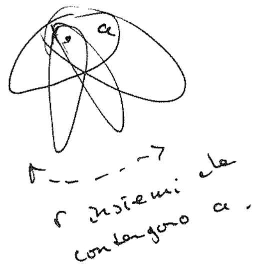
$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Dim. Sia $a \in A_1 \cup \dots \cup A_n$

Supponiamo che a è contenuto in esattamente r delle insiemi $A_1, \dots, A_n$

si osserva che a appartiene alla intersezione di k delle insiemi $A_1 \dots A_n$ se e solo se ognuno di questi k insiemi contiene a.

Quindi tra le $\binom{n}{k}$ modi di prendere k insiemi da $A_1 \dots A_n$ ci sono $\binom{r}{k}$ che contengono a nella loro intersezione.



Quindi a è contato $\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \dots + (-1)^{r+1}\binom{r}{r}$ volte

Dato che $0 = (1 + (-1))^r = \binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \dots + (-1)^r \binom{r}{r}$ e

$\binom{r}{0} = 1$ segue che $\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \dots + (-1)^{r+1}\binom{r}{r} = 1$

cioè a è contato una volta.

Esempio

Quanti numeri $x \in \mathbb{Z}$ ci sono con $1 \le x \le 1000$ che sono divisibile per 4, 6, 15 o 210?

$A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 4 \mid x \}$

$B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 6 \mid x \}$

$C = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 15 \mid x \}$

$D = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1000, 210 \mid x \}$

cerchiamo $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|) + (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|) - |A \cap B \cap C \cap D|$

$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor = 250$

$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$

$|C| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66$

$|D| = \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor = 4$

$\overline{\quad 486 \quad}$

$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor = 83$

$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{60} \right\rfloor = 16$

$|A \cap D| = \left\lfloor \frac{1000}{420} \right\rfloor = 2$

$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$

$|B \cap D| = \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor = 4$

$|C \cap D| = \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor = 4$

$\overline{\quad 142 \quad}$

$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{60} \right\rfloor = 16$

$|A \cap B \cap D| = \left\lfloor \frac{1000}{420} \right\rfloor = 2$

$|A \cap C \cap D| = \left\lfloor \frac{1000}{420} \right\rfloor = 2$

$|B \cap C \cap D| = \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor = 4$

$\overline{\quad 24 \quad}$

$|A \cap B \cap C \cap D| = \left\lfloor \frac{1000}{420} \right\rfloor = 2$

Quindi $|A \cup B \cup C \cup D| = 486 - 142 + 24 - 2 = 366$

Esempio: Quali soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 5$ e $0 \leq x_3 \leq 9$

sia $A = \{$ soluzioni con $x_1 \geq 4 \}$ $B = \{$ soluzioni con $x_2 \geq 6 \}$ $C = \{$ soluzioni con $x_3 \geq 10 \}$

sia $U = \{$ tutte le soluzioni con $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ e $x_3 \geq 0 \}$

Allora $|U| - |A \cup B \cup C|$ è la risposta.

$|U| : 15 * 2 / \binom{17}{2} = 136$

$|A| : 11 * 2 / \binom{13}{2} = 78$

$|B| : 9 * 2 / \binom{11}{2} = 55$

$|C| : 5 * 2 / \binom{7}{2} = 21$

$|A \cap B| : 5 * 2 / \binom{7}{2} = 21$

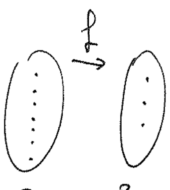
$|A \cap C| : 1 * 2 / \binom{3}{2} = 3$

$|B \cap C| : 0$

$|A \cap B \cap C| : 0$

Quindi il numero di soluzioni è $136 - \left((78 + 55 + 21) - (21 + 3 + 0) + 0 \right) = 6$

Esempio: Siano A e B insiemi con $|A| = 7$ e $|B| = 3$.
Quali funzioni $f : A \to B$ sono suriettive?



A B

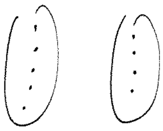
sia $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$
$B = \{b_1, b_2, b_3\}$.

per $i \in \{1, 2, 3\}$ sia $X_i = \{ f : A \to B \mid b_i$ non è nel immagine di $f \}$ e
sia $X = \{ f : A \to B \}$

Allora $|X| = 3^7$, $|X_i| = 2^7$, $|X_i \cap X_j| = 1^7$ se $i \neq j$, $|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = 0$

Quindi $3^7 - [3 \cdot 2^7 - 3 \cdot 1^7 + 1 \cdot 0] = 2187 - 384 + 3 = 1806$

Esempio: In quanti modi si può dare 5 monete di valore distinti a 4 bambini se ogni bambino deve avere almeno una moneta?



monete A   bambini B

cerco una funzione suriettiva: Quante ci sono?

sia $X = \{ f: A \to B \}$ allora $|X| = 4^5$

sia $X_i = \{ f: A \to B \mid$ bambino i piange perché non ha una moneta $\}$.

Allora $|X_i| = 3^5 \quad 1 \le i \le 4$

$|X_i \cap X_j| = 2^5 \quad 1 \le i < j \le 4$

$|X_i \cap X_j \cap X_k| = 1^5 \quad 1 \le i < j < k \le 4$

$|X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4| = 0$

Quindi $4^5 - \left[\binom{4}{1} \cdot 3^5 - \binom{4}{2} \cdot 2^5 + \binom{4}{3} \cdot 1^5 - \binom{4}{4} \cdot 0 \right] = 1024 - 972 + 192 - 4 + 0$
$= 240$

<u>Def</u> un "derangement" è una permutazione senza punti fissi

cioè una funzione $f: M \to M$ biunivoca con $f(m) \neq m$ per ogni $m \in M$.

Esempio: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Allora:

$1 \to 2$	$1 \to 2$
$2 \to 1$	$2 \to 1$
$3 \to 4$	$3 \to 5$
$4 \to 5$	$4 \to 4$
$5 \to 3$	$5 \to 3$
è un derangement	non è un derangement.

se $|M| = n$ Quanti derangements su M ci sono?

Proviamo: $n=1$ $\quad \underline{\underline{0}}$ $\qquad n=2$ $\quad \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \end{matrix}$ $\quad \underline{\underline{1}}$ $\qquad n=3$ $\quad \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \end{matrix}$ $\quad \underline{\underline{2}}$

Teorema

Il numero di derangements su un insieme di n elementi è

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

Dim: Sia $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ e consideriamo l'insieme delle permutazioni su M.

$X = \{ f: M \to M \mid f$ una permutazione$\}$. Per $1 \le i \le n$ definiamo

$X_i = \{ f \in X \mid f(i) = i \}$ (cioè X_i è l'insieme delle permutazioni che fissano i)

Allora $D_n = |X| - \sum |X_i| + \sum |X_i \cap X_j| - \cdots + (-1)^n |X_1 \cap \cdots \cap X_n|$

Allora $|X| = n!$

$|X_i| = (n-1)!$, ci sono $\binom{n}{1}$ di questi termini

$|X_i \cap X_j| = (n-2)!$, ci sono $\binom{n}{2}$ di questi termini

$\vdots$

$|X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}| = (n-k)!$, ci sono $\binom{n}{k}$ di questi termini

$\vdots$

$|X_1 \cap \dots \cap X_n| = 1$, ci sono $\binom{n}{n}$ di questi termini.

Quindi

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 0!$$

$$= n! - \frac{n!}{(n-1)!\,1!}(n-1)! + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}(n-2)! - \frac{n!}{(n-3)!\,3!}(n-3)! + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!\,0!}\,0!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

Applicazione: Hat check problem

Al teatro n persone lasciano loro cappello nella guardaroba, Il addetto guardaroba dimentica di mettere i numeri sui cappelli. Il addetto guardaroba da i cappelli indietro arbitrariamente

Quale è la probabilità che nessuno ha il suo cappello?

$$\frac{\text{nessuno ha il suo cappello}}{\text{tutte le possibilità}} = \frac{D_n}{n!}. \quad \text{Si osserva } \lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}$$