Nome: ______________________________ Matricola: ______________

Matematica Discreta

Esame del 25-07-2011

Esercizio 1. (6 pt)
Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare, e la base naturale e b la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ dove F è data dalla matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$ e calcolare $[F]_b^b$.

Esercizio 2. (2 pt)
Calcolare la distanza tra il punto $A = (1, 1, 1)$ e la retta passante per i punti $B = (3, -3, 1)$ e $C = (-3, 1, 3)$.

Esercizio 3. (5 pt)
Risolvere in $\mathbb{Z}$ il sistema dato da $\begin{cases} x \equiv 111 \pmod{44} \\ 30x \equiv 17 \pmod{47} \\ x \equiv -222 \pmod{51} \end{cases}$.

Esercizio 4. (5 pt)
Consideriamo la ricorrenza $a_n = -10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 6n + 2$, per $n \geq 2$.
a.) Dimostrare che $a_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{3}$, $n \geq 0$, è una soluzione della ricorrenza.
b.) Trovare tutte le soluzioni della ricorrenza.
c.) Trovare la soluzione con $a_0 = \frac{1}{2}$ e $a_1 = -2$, e calcolare a_0, a_1, a_2 e a_3 usando la ricorrenza e la risposta.

Esercizio 5. (4 pt)
Quanti bit string di lunghezza 42 ci sono tale che
a.) il bit string ha al massimo trentasei 0 e al massimo nove 1, oltre si deve avere che il bit string corrispondente alle prime sette posizione contiene almeno sei 0 e il bit string corrispondente alle ultimi quattordici posizioni contiene esattamente sei 1.
b.) il bit string corrispondente alle prime undici posizioni ha esattamente otto 0 e il bit string corrispondente alle ultime venticinque posizioni non contiene lo string 1100110 come sotto-string.

Esercizio 6. (2 pt)
Sia $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base naturale di $\mathbb{R}^2$. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta $x + 4y = 0$ e sia $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita tramite $S(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $S(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.
Stabilire se $S^{-1} \circ T \circ S$ è una riflessione o no. In caso di si trovare l'equazione parametrica della retta.

Esercizio 7. (4 pt)
a.) Quanti $x \in \mathbb{Z}$ con $1020204040606 \leq x \leq 9292929292929$ si può fare usando le cifre di 9112230000000 tale che x è divisibile per 11 e contiene 02 come sotto espressione.
b.) Quante soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1000$, dove $x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, \ldots, x_7 \geq 0$, con $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 23$, $30 \leq x_3 \leq 300$, $20 \leq x_5 \leq 200$, $x_2 + x_4 + x_6 = 400$ e $x_2 \neq 3x_6$?

Esercizio 8. (2 pt)
Il numero $(1111112222220000001111112222220000002222221111110000000)_3$ è
(a) divisibile per 8 ma non per 28.
(b) divisibile per 28 ma non per 8.
(c) divisibile per 8 e per 28.
(d) divisibile nè per 8 e nè per 28.

8.2. Un normale del piano passante per i punti $(1, 0, 0)$, $(2, 3, 0)$ e $(1, 4, 6)$ è
(a) $\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5 ,6 e 7 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 8, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorrettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.