Nome: ____ Matricola: __________________

Matematica Discreta

Esame del 30-07-2012

Esercizio 1. (6 pt)

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare, e la base naturale e b la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ dove F è data dalla matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$ e calcolare $[F]_b^b$.

Esercizio 2. (2 pt)

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la retta $l = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ e i due punti $A = (1, -2, 3)$ e $B = (3, 4, 5)$.

Calcolare la distanza tra il punto B e il piano che contiene la retta l e il punto A.

Esercizio 3. (5 pt)

Risolvere in $\mathbb{Z}$ il sistema dato da $\begin{cases} 27x \equiv 458 \pmod{65} \\ x \equiv -321 \pmod{68} \\ x \equiv 789 \pmod{73} \end{cases}$.

Esercizio 4. (5 pt)

Consideriamo la ricorrenza $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3n - 3$, per $n \geq 2$.

a.) Dimostrare che $a_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{9}$, $n \geq 0$, è una soluzione della ricorrenza.

b.) Trovare tutte le soluzioni della ricorrenza.

c.) Trovare la soluzione con $a_0 = -1$ e $a_1 = \frac{2}{3}$, e calcolare a_0, a_1, a_2 e a_3 usando la ricorrenza e la risposta.

Esercizio 5. (4 pt)

Quanti bit string di lunghezza 55 ci sono tale che

a.) il bit string ha esattamente quarantanove 0 oltre si deve avere che il bit string corrispondente alle prime trenta posizione contiene almeno ventotto 0 e il bit string corrispondente alle ultimi venti posizioni contiene al massimo due 1.

b.) il bit string corrispondente alle prime dieci posizioni ha esattamente sei 0 e il bit string corrispondente alle ultime ventisette posizioni contiene lo string 1001100 come sotto-string.

Esercizio 6. (2 pt)

Sia $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base naturale di $\mathbb{R}^2$. Per ogni $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ definiamo $P_{\vec{n}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare dato da $P_{\vec{n}} : \vec{v} \mapsto proj_{\vec{n}}(\vec{v})$. Sia $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita tramite $S(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$, $S(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Sia $\vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Trovare, se esistono, tutti i $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ tale che $S^{-1} \circ P_{\vec{w}} \circ S = P_{\vec{n}}$ o spegiare perchè non esistono.

Esercizio 7. (4 pt)

a.) Quanti $x \in \mathbb{Z}$ con $10000000 \leq x \leq 60606060$ si possono comporre usando le cifre di 1112660000 tale che x è divisibile per 6 e contiene 16 come sotto espressione.

b.) Quante soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 3200$, dove $x_1, \ldots, x_9 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, \ldots, x_9 \geq 0$, con $20 \leq x_1 \leq 120$, $30 \leq x_2 \leq 230$, $350 \leq x_4 \leq 480$, $x_9 \geq 10$, $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 850$ e $x_1 + x_2 \neq x_4 - 1$?

Esercizio 8. (2 pt)

8.1 Il numero $(33311100044433311100011100044433311133300)_5$ è

(a) divisibile per 62 ma non per 42.

(b) divisibile per 42 ma non per 62.

(c) divisibile per 62 e per 42.

(d) divisibile nè per 62 e nè per 42.

8.2. In $\mathbb{R}^2$ la rette $3x + 2y = -21$ e la retta $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, sono

a.) parallele e diverse. b.) uguali. c.) perpendicolari. d.) nessuna delle precedenti.

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5 ,6 e 7 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 8, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorrettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.