

MATEMATICA PER L'ANALISI DEI DATI

Capitolo 2: Calcolo delle Probabilità

2.3 Probabilità condizionata

Giovanni Amendola

Corso di laurea triennale in Informatica
Università della Calabria

Anno Accademico 2020/2021

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
 2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?
-

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.
 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.
 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.
 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.
Pertanto $P(A)$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37}$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.
 $B = \text{"Esce un numero dispari"}$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.
 $B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

"Esce un numero tra 1 e 19" =

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

"Esce un numero tra 1 e 19" $= A \cap B$. Quindi $|A \cap B|$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18}$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. La indicheremo con $P(A|B)$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. La indicheremo con $P(A|B)$

NOTA: $P(A \cap B)$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. La indicheremo con $P(A|B)$

NOTA: $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. La indicheremo con $P(A|B)$

NOTA: $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$ e $P(B)$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. La indicheremo con $P(A|B)$

NOTA: $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$ e $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$.

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. La indicheremo con $P(A|B)$

NOTA: $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$ e $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$. Allora $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. La indicheremo con $P(A|B)$

NOTA: $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$ e $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$. Allora $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} =$

Probabilità condizionata

Esempio

Si giocano alla roulette francese i numeri 1, 19 e 24.

1. Qual è la probabilità di vincere?
2. Sapendo che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?

-
1. $A = \text{"Esce un numero tra 1, 19 e 24"}$. Quindi $|A| = 3$.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$. Quindi $|\Omega| = 37$.

Pertanto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{37} \simeq 0.081$.

2. Non dobbiamo più guardare a tutto Ω , ma ad un suo sottoinsieme.

$B = \text{"Esce un numero dispari"} = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\}$. Quindi $|B| = 18$.

Non ha neppure senso guardare a tutto A . Dobbiamo restringerci a

$\text{"Esce un numero tra 1 e 19"} = A \cap B$. Quindi $|A \cap B| = 2$.

La probabilità di vincere è $\frac{2}{18} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. La indicheremo con $P(A|B)$

NOTA: $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$ e $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$. Allora $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$

Probabilità condizionata

Definizione (**Probabilità condizionata**)

Sia B un evento di probabilità non nulla. Si chiama **probabilità dell'evento A , condizionata a B** , il numero

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}; B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}; B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}; P(B_1) = \frac{1}{2}$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

-
- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} =$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} =$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) =$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. **$P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.**
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. **$P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.**
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) =$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. **$P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.**
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. **$P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.**
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$. Allora, $P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$. Allora, $P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.
- $P(A) =$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$. Allora, $P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.
- $P(A) = P(A \cap (B_1 \cup B_2))$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$. Allora, $P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.
- $P(A) = P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2))$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$. Allora, $P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.
- $P(A) = P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) =$
 $= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. **$P(A)$ non è $\frac{3}{8}$.**
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$. Allora, $P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.
- **$P(A) = P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) =$**

$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$. Allora, $P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.
- $P(A) = P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) =$
 $= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$. Allora, $P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.
- $P(A) = P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) =$
 $= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5+6}{30}$

Probabilità totali

Esempio

Supponiamo di avere due urne, B_1 e B_2 , che contengono rispettivamente: 2 palline rosse e 1 nera; 3 palline rosse e 2 nere. Scegliamo a caso un'urna e poi estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

- $B_1 = \{r_1, r_2, n_1\}$; $B_2 = \{r_3, r_4, r_5, n_2, n_3\}$; $P(B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_2) = \frac{1}{2}$.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n_1, n_2, n_3\}$. Osservazione: **Non è uniforme!**
- $A = \text{"Estraggo una pallina nera"}$. $P(A)$ **non è** $\frac{3}{8}$.
- Se scelgo l'urna B_1 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{1}{3} = P(A|B_1)$.
- Se scelgo l'urna B_2 , la probabilità di estrarre una nera è $\frac{2}{5} = P(A|B_2)$.
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$. Allora, $P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.
- $P(A) = P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) =$
 $= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5+6}{30} = \frac{11}{30}$

Teorema delle probabilità totali

Teorema (**Probabilità totali**)

Sia A un evento e $\{B_j\}_{j=1}^n$ una partizione di Ω , ovvero:

1. $\bigcup_{j=1}^n B_j = \Omega$;
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.

tale che $P(B_j) \neq 0$ per ogni j . Allora

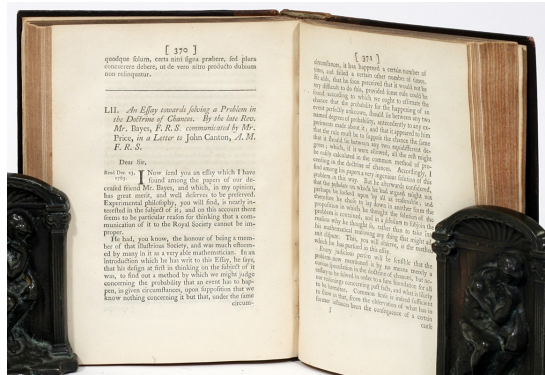
$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(A|B_j) \cdot P(B_j).$$

Dimostrazione

...

Teorema di Bayes

Thomas Bayes, *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*
(1763)



Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- A = "Estrarre una pallina nera"

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) =$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1)$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$.

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(B_1|A) =$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} =$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)}$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}}$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{30}{11}$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- A = "Estrarre una pallina nera"
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{30}{11} = \frac{5}{11}$.

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{30}{11} = \frac{5}{11}$.

Osservazione: Poiché $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$,

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{30}{11} = \frac{5}{11}$.

Osservazione: Poiché $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$,

$$P(B_1|A) =$$

Teorema di Bayes

Esempio

Consideriamo l'esempio precedente. Se abbiamo estratto una pallina nera, qual è la probabilità di avere scelto l'urna B_1 ?

- $A = \text{"Estrarre una pallina nera"}$
- $P(B_1|A) = ?$
- Applicando la definizione di probabilità condizionata: $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$
- Sappiamo che $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$. Allora, $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$.
- $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{30}{11} = \frac{5}{11}$.

Osservazione: Poiché $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$,

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)}.$$

Teorema di Bayes

Osservazione

Dati due eventi A e B (di probabilità non nulla),

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \quad P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Dunque $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$. Da cui si ottiene

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Teorema di Bayes

Osservazione

Dati due eventi A e B (di probabilità non nulla),

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \quad P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Dunque $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$. Da cui si ottiene

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Teorema di Bayes

Sia A un evento di probabilità non nulla e B_j una famiglia di eventi che soddisfa le ipotesi del teorema delle probabilità totali. Allora, per ogni k :

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Esercizi

Esercizio 1.2 (Baldi)

Nella lotteria di Oslo vengono venduti 1 milione di biglietti. Al momento dell'estrazione da ognuna di sei urne, contenenti ciascuna dieci palline numerate da 0 a 9, vengono estratte le cifre del biglietto vincente, partendo da quella di sinistra.

- (a) Costruire uno spazio di probabilità (Ω, P) adeguato a descrivere questa situazione. In *Un biglietto della lotteria* di J. Verne il biglietto di Ole Kamp ha il numero 009672; qual è la probabilità che venga estratto?
- (b) Nel romanzo, J. Verne discute quale sia la probabilità che Ole Kamp ha di vincere dopo che dalle prime quattro urne sono stati estratti i numeri 0096. Indichiamo con B l'evento "le prime quattro urne hanno dato i numeri 0096". Descrivere la probabilità condizionale $P(\cdot | B)$. E se B fosse l'evento "le prime cinque urne hanno dato i numeri 00967"?

Esercizi

Esempio 52 (Bramanti)

Un'impresa ha installato un sistema automatico per il controllo di qualità, il quale garantisce che, se un pezzo è difettoso, esso viene eliminato con probabilità 0.995. C'è una piccola probabilità, pari a 0.001, che anche un pezzo non difettoso venga eliminato. Si sa anche la probabilità che un pezzo sia difettoso è 0.2.

Si calcoli la probabilità che un pezzo che non sia stato eliminato al controllo di qualità sia difettoso.