Disuguaglianza di Chebichev

Disuguaglianza di Chebichev

Teorema (Disuguaglianza di Chebichev)

Sia X una variabile aleatoria di valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 finite. Allora, per ogni numero $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Disuguaglianza di Chebichev

Teorema (Disuguaglianza di Chebichev)

Sia X una variabile aleatoria di valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 finite. Allora, per ogni numero $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Osservazione

$$P(|X - \mu_X| < \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Ovvero

$$P(\mu_X - \delta\sigma_X < X < \mu_X + \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Disuguaglianza di Chebichev

Teorema (Disuguaglianza di Chebichev)

Sia X una variabile aleatoria di valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 finite. Allora, per ogni numero $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Osservazione

$$P(|X - \mu_X| < \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Ovvero

$$P(\mu_X - \delta\sigma_X < X < \mu_X + \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Applicazione

Disuguaglianza di Chebichev

Teorema (Disuguaglianza di Chebichev)

Sia X una variabile aleatoria di valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 finite. Allora, per ogni numero $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Osservazione

$$P(|X - \mu_X| < \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Ovvero

$$P(\mu_X - \delta\sigma_X < X < \mu_X + \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Applicazione

Se $\delta = 3$

Disuguaglianza di Chebichev

Teorema (Disuguaglianza di Chebichev)

Sia X una variabile aleatoria di valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 finite. Allora, per ogni numero $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Osservazione

$$P(|X - \mu_X| < \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Ovvero

$$P(\mu_X - \delta\sigma_X < X < \mu_X + \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Applicazione

Se $\delta = 3$, allora $P(|X - \mu_X| < 3\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{9} \simeq 0.88$.

Disuguaglianza di Chebichev

Teorema (Disuguaglianza di Chebichev)

Sia X una variabile aleatoria di valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 finite. Allora, per ogni numero $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Osservazione

$$P(|X - \mu_X| < \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Ovvero

$$P(\mu_X - \delta\sigma_X < X < \mu_X + \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Applicazione

Se $\delta = 3$, allora $P(|X - \mu_X| < 3\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{9} \simeq 0.88$.
Se $\delta = 5$

Disuguaglianza di Chebichev

Teorema (Disuguaglianza di Chebichev)

Sia X una variabile aleatoria di valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 finite. Allora, per ogni numero $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Osservazione

$$P(|X - \mu_X| < \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Ovvero

$$P(\mu_X - \delta\sigma_X < X < \mu_X + \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Applicazione

Se $\delta = 3$, allora $P(|X - \mu_X| < 3\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{9} \simeq 0.88$.
Se $\delta = 5$, allora $P(|X - \mu_X| < 5\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{25} = 0.96$.

Disuguaglianza di Chebichev

Teorema (Disuguaglianza di Chebichev)

Sia X una variabile aleatoria di valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 finite. Allora, per ogni numero $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Osservazione

$$P(|X - \mu_X| < \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Ovvero
$$P(\mu_X - \delta\sigma_X < X < \mu_X + \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Applicazione

Se $\delta = 3$, allora $P(|X - \mu_X| < 3\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{9} \simeq 0.88$.
Se $\delta = 5$, allora $P(|X - \mu_X| < 5\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{25} = 0.96$.
Se $\delta = 10$

Disuguaglianza di Chebichev

Teorema (Disuguaglianza di Chebichev)

Sia X una variabile aleatoria di valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 finite. Allora, per ogni numero $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Osservazione

$$P(|X - \mu_X| < \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Ovvero

$$P(\mu_X - \delta\sigma_X < X < \mu_X + \delta\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Applicazione

Se $\delta = 3$, allora $P(|X - \mu_X| < 3\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{9} \simeq 0.88$.
Se $\delta = 5$, allora $P(|X - \mu_X| < 5\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{25} = 0.96$.
Se $\delta = 10$, allora $P(|X - \mu_X| < 10\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{100} = 0.99$.

Media campionaria

Media campionaria

Definizione (Media campionaria)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Media campionaria

Definizione (**Media campionaria**)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

Media campionaria

Definizione (**Media campionaria**)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) =$$

Media campionaria

Definizione (**Media campionaria**)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

Media campionaria

Definizione (**Media campionaria**)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) =$$

Media campionaria

Definizione (Media campionaria)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu =$$

Media campionaria

Definizione (**Media campionaria**)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

Media campionaria

Definizione (**Media campionaria**)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

$$Var\left(\bar{X}_n\right) =$$

Media campionaria

Definizione (Media campionaria)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

$$Var\left(\bar{X}_n\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

Media campionaria

Definizione (Media campionaria)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

$$Var\left(\bar{X}_n\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) =$$

Media campionaria

Definizione (**Media campionaria**)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu .$$

$$Var\left(\bar{X}_n\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 =$$

Media campionaria

Definizione (Media campionaria)

Data una sequenza di n variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ tutte aventi la stessa legge e indipendenti, si definisce la variabile aleatoria **media campionaria**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Osservazione (Valore atteso e Varianza della Media campionaria)

Se le variabili aleatorie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hanno tutte media μ e varianza σ^2, allora:

$$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

$$Var\left(\bar{X}_n\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Legge dei grandi numeri

Legge dei grandi numeri

Teorema di Bernoulli (Legge dei grandi numeri)

Sia $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una n-upla di variabili aleatorie con la stessa legge, di valore atteso μ e varianza σ finite. Allora, per ogni numero $\epsilon > 0$, si ha che

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Legge dei grandi numeri

Teorema di Bernoulli (Legge dei grandi numeri)

Sia $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una n-upla di variabili aleatorie con la stessa legge, di valore atteso μ e varianza σ finite. Allora, per ogni numero $\epsilon > 0$, si ha che

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Esempio

Lanciamo una moneta n volte e registriamo quante volte esce Testa.

- Se $n = 10000$, quanto vale la probabilità che la **frequenza relativa** si discosti dalla **probabilità classica** $(\frac{1}{2})$ per più di 0.02?
- Quanti lanci dovremmo fare per ottenere una probabilità di discostamento inferiore a 0.0001?