MATEMATICA PER L'ANALISI DEI DATI

Capitolo 3: Variabili Aleatorie e Modelli Probabilistici

3.2 Variabili Aleatorie Continue

Giovanni Amendola

Corso di laurea triennale in Informatica
Università della Calabria

Anno Accademico 2020/2021

Variabile Aleatoria Continua

Definizione (**Variabile Aleatoria Continua**)

Sia Ω uno spazio campionario continuo. Una v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ è definita assegnando una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ detta **densità continua** di X, tale che

$$f_X(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } \int_{\mathbb{R}} f_X(t)dt = 1.$$

Questa densità determina la **legge** di X:

$$P(X \in I) = \int_I f_X(t)dt, \forall I \subseteq \mathbb{R}.$$

Definizione (**Valore atteso e Varianza**)

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)dt.$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_X(t)dt - E(X)^2.$$

Variabile Aleatoria Continua

Definizione (Funzione di ripartizione)

Si chiama **funzione di ripartizione** di X, la funzione

$$F_X(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(t)dt.$$

Variabile Aleatoria Continua

Definizione (**Funzione di ripartizione**)

Si chiama **funzione di ripartizione** di X, la funzione

$$F_X(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(t)dt.$$

Esempio (**Densità uniforme**)

Una persona esce di casa alle 8 e rientra alle 16, dimenticandosi di spegnere una lampadina. Al rientro la trova fulminata. Sia X la variabile aleatoria che calcola l'istante in cui si è fulminata.

(a) Determinare la funzione di densità e dire qual è la probabilità che si sia fulminata tra le 10 e le 13?

(b) Si determinino: $P(11 \leq X \leq 15)$ e $P(X \geq 14)$.

(c) Si calcoli il valore atteso e la varianza di X.

(d) Si determini la funzione di ripartizione F di X e se ne tracci il grafico.

Legge gaussiana standard (o legge normale standard)

Definizione (Gaussiana standard o Normale standard)

La **v.a. gaussiana (normale) standard** è una v.a. continua con densità

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi(t).$$

Legge gaussiana standard (o legge normale standard)

Definizione (Gaussiana standard o Normale standard)

La **v.a. gaussiana (normale) standard** è una v.a. continua con densità

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi(t).$$

Nel caso di una **v.a. gaussiana** la funzione di ripartizione è

$$F_X(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(z).$$

Legge gaussiana standard (o legge normale standard)

Definizione (**Gaussiana standard o Normale standard**)

La **v.a. gaussiana (normale) standard** è una v.a. continua con densità

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi(t).$$

Nel caso di una **v.a. gaussiana** la funzione di ripartizione è

$$F_X(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(z).$$

Calcolo di **valore atteso e varianza** per la **normale standard**

$$\mu = E(X) = \int_{\mathbb{R}} t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 0.$$

Legge gaussiana standard (o legge normale standard)

Definizione (**Gaussiana standard o Normale standard**)

La **v.a. gaussiana (normale) standard** è una v.a. continua con densità

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi(t).$$

Nel caso di una **v.a. gaussiana** la funzione di ripartizione è

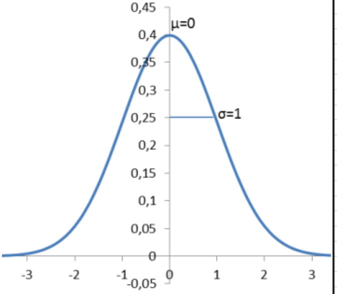
$$F_X(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(z).$$

Calcolo di **valore atteso e varianza** per la **normale standard**

$$\mu = E(X) = \int_{\mathbb{R}} t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 0.$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 1.$$

Tabella della Funzione di ripartizione della Gaussiana standard $\Phi(z) = P(X \leq z)$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989

Legge gaussiana o legge normale

Definizione (**Gaussiana o Normale**)

La **v.a. gaussiana (normale)** X è una v.a. continua con densità

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- La funzione di ripartizione di una **v.a. gaussiana** è

$$F_X(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

- Il valore atteso è $E(X) = \mu$.
- La varianza è $Var(X) = \sigma^2$.

Si scrive $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e si legge X **ha legge normale (o gaussiana) di media** μ **e varianza** σ^2.

Legge gaussiana o legge normale

Esempio

Il peso X del contenuto di certe confezioni alimentari segue una distribuzione normale con media $\mu = 250g$ e deviazione standard $\sigma = 3g$. Si calcoli la probabilità che una confezione:

(1) Pesi meno di $254g$.

(2) Pesi meno di $245g$.

(3) Pesi più di $250g$.

(4) Abbia un peso tra $247g$ e $253g$.

(5) Quanto deve essere al massimo il peso per avere una probabilità del 90%?