Legge gaussiana o legge normale

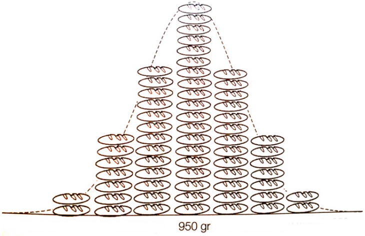
Applicazioni

- Errori di misurazione di una grandezza fisica (massa, lunghezza, ecc) (*variazioni nella misura di una stessa grandezza*).
- Distribuzione di una caratteristica quantitativa di una popolazione (peso, statura, ecc) (*variazioni tra individui diversi presenti in natura*)
- Dimensione effettiva di oggetti prodotti in serie (volume, spessore, ecc) (*variazioni tra oggetti diversi con l'intento di produrli identici*).

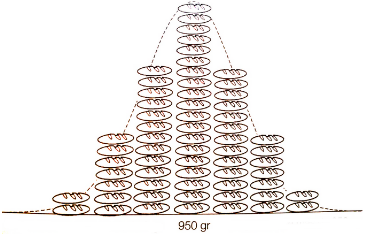
La variabile aleatoria è *somma di tanti piccoli contributi indipendenti*.

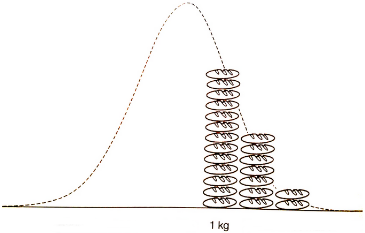
Legge gaussiana o normale: Le pagnotte di Poincarè

Legge gaussiana o normale: Le pagnotte di Poincarè



Legge gaussiana o normale: Le pagnotte di Poincarè





Teorema del limite centrale

Teorema dei Limite Centrale

Sia $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una sequenza di v.a. indipendenti e identicamente distribuite, con valore atteso μ e varianza σ^2. Sia $\bar{X}_n$ la loro media campionaria. Allora $\bar{X}_n \simeq N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, più precisamente

$$P(\bar{X}_n \leq t) \to \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \text{ per } n \to \infty, \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

In altri termini: **Date n variabili aleatorie indipendenti e con la stessa legge, al crescere di n, la media campionaria tende a distribuirsi con legge gaussiana di media μ e varianza σ^2/n.**

Teorema del limite centrale

Teorema dei Limite Centrale

Sia $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una sequenza di v.a. indipendenti e identicamente distribuite, con valore atteso μ e varianza σ^2. Sia $\bar{X}_n$ la loro media campionaria. Allora $\bar{X}_n \simeq N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, più precisamente

$$P(\bar{X}_n \leq t) \to \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \text{ per } n \to \infty, \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

In altri termini: **Date n variabili aleatorie indipendenti e con la stessa legge, al crescere di n, la media campionaria tende a distribuirsi con legge gaussiana di media μ e varianza σ^2/n.**

Esempio

Distribuzione di testa in 15 lanci di una moneta: le probabilità teoriche (e le frequenze relative) tendono ad una distribuzione gaussiana.

Approssimazione normale della Binomiale

Approssimazione normale della Binomiale

Consideriamo una variabile aleatoria con legge binomiale $X \sim B(n, p)$.

Approssimazione normale della Binomiale

Consideriamo una variabile aleatoria con legge binomiale $X \sim B(n, p)$.

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, per cui $\bar{X}_n = X/n$;

Approssimazione normale della Binomiale

Consideriamo una variabile aleatoria con legge binomiale $X \sim B(n, p)$.

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, per cui $\bar{X}_n = X/n$;
- $\{X_i\}$ è una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite;

Approssimazione normale della Binomiale

Consideriamo una variabile aleatoria con legge binomiale $X \sim B(n, p)$.

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, per cui $\bar{X}_n = X/n$;
- $\{X_i\}$ è una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite;
- $\mu = E[X_i] = p$;

Approssimazione normale della Binomiale

Consideriamo una variabile aleatoria con legge binomiale $X \sim B(n, p)$.

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, per cui $\bar{X}_n = X/n$;
- $\{X_i\}$ è una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite;
- $\mu = E[X_i] = p$;
- $\sigma^2 = Var[X_i] = p(1-p)$.

Approssimazione normale della Binomiale

Consideriamo una variabile aleatoria con legge binomiale $X \sim B(n, p)$.

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, per cui $\bar{X}_n = X/n$;
- $\{X_i\}$ è una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite;
- $\mu = E[X_i] = p$;
- $\sigma^2 = Var[X_i] = p(1-p)$.
- Dal **Teorema del limite centrale**: $\bar{X}_n \simeq N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

Approssimazione normale della Binomiale

Consideriamo una variabile aleatoria con legge binomiale $X \sim B(n,p)$.

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, per cui $\bar{X}_n = X/n$;
- $\{X_i\}$ è una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite;
- $\mu = E[X_i] = p$;
- $\sigma^2 = Var[X_i] = p(1-p)$.
- Dal **Teorema del limite centrale**: $\bar{X}_n \simeq N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

Pochè $X = n\bar{X}_n$, si ha $X \simeq N(np, np(1-p))$

Approssimazione normale della Binomiale

Consideriamo una variabile aleatoria con legge binomiale $X \sim B(n, p)$.

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, per cui $\bar{X}_n = X/n$;
- $\{X_i\}$ è una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite;
- $\mu = E[X_i] = p$;
- $\sigma^2 = Var[X_i] = p(1-p)$.
- Dal **Teorema del limite centrale**: $\bar{X}_n \simeq N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

Pochè $X = n\bar{X}_n$, si ha $X \simeq N(np, np(1-p))$, ovvero

$$P(X \leq t) \simeq \Phi\left(\frac{t - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Approssimazione normale della Binomiale

Approssimazione normale della Binomiale

Criteri di applicazione

L'approssimazione va applicata sotto opportune condizioni:

1. n "grande";
2. meglio se p vicino a 0.5 (in tal modo la densità binomiale è simmetrica);
3. da cui si accetta il seguente criterio: $np > 5$ e $n(1-p) > 5$.

Approssimazione normale della Binomiale

Criteri di applicazione

L'approssimazione va applicata sotto opportune condizioni:

1. n "grande";
2. meglio se p vicino a 0.5 (in tal modo la densità binomiale è simmetrica);
3. da cui si accetta il seguente criterio: $np > 5$ e $n(1-p) > 5$.

Osservazione (**Approssimazione con Gauss o Poisson**)

1. Se p è vicino a 0 (o ad 1), l'approssimazione con Poisson è migliore.
2. Se p è vicino a 0.5, l'approssimazione con Gauss è migliore.

Approssimazione normale della Binomiale

Criteri di applicazione

L'approssimazione va applicata sotto opportune condizioni:

1. n "grande";
2. meglio se p vicino a 0.5 (in tal modo la densità binomiale è simmetrica);
3. da cui si accetta il seguente criterio: $np > 5$ e $n(1-p) > 5$.

Osservazione (**Approssimazione con Gauss o Poisson**)

1. Se p è vicino a 0 (o ad 1), l'approssimazione con Poisson è migliore.
2. Se p è vicino a 0.5, l'approssimazione con Gauss è migliore.

Osservazione (**Fattore di correzione**)

L'approssimazione di una v.a. discreta con una v.a. continua necessita di un *fattore di correzione di continuità*, tipicamente 0.5, per cui

$$P(X \leq k) \simeq \Phi\left(\frac{k + 0.5 - \mu}{\sigma}\right).$$

Esercizi

Esercizio 3.50 (Bramanti)

Due dadi vengono lanciati per 60 volte consecutive. Qual è la probabilità di ottenere 7 almeno 10 volte? Per rispondere:

(a) si determini la legge seguita dalla v.a. "numero di volte in cui si ottiene 7, lanciando 60 volte due dadi" e si scriva la formula esatta che assegna la probabilità dell'evento cercato;

(b) si calcoli poi la stessa probabilità facendo uso di una opportuna approssimazione.