

Prova scritta del 10.02.2020

(tempo: 2 ore per gli studenti di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*;
2,5 ore per gli studenti di *Matematica per l'Analisi dei Dati*)

Esercizio 1

Si considerino le seguenti coppie di dati relativi alle variabili statistiche X e Y.

X	15	19	20	12	6	10	13	5	9	15	8	8	16	15	7	10	17	18	20	23	11	20	22	15
Y	4	5	6	3	1	3	4	1	3	5	2	3	5	5	2	4	8	10	8	9	5	9	6	12

1. Determinare i valori dei tre quartili relativi alla variabile statistica Y.
2. Disegnare per Y un boxplot, con baffi il 5° e il 95° percentile. Quali sono i valori degli outliers?
3. Si considerino solo gli ultimi tre dati riportati nella tabella sopra. Calcolare medie e varianze per X e Y.
4. Calcolare, in riferimento agli ultimi tre dati, il coefficiente di correlazione e valutare se esiste qualche correlazione tra i dati, spiegando di che tipo di correlazione si tratta.
5. Determinare la retta di regressione (sempre in riferimento agli ultimi tre dati) e determinare il valore previsto per la Y nel caso in cui la X valga 28.

Esercizio 2

Si consideri il gioco della Tombola. Una cartella della tombola è composta da tre file di numeri, tutti diversi tra loro. Su ogni fila ci sono 5 numeri tra 1 e 90 (vedi figura sotto). Ogni giocatore può comprare più cartelle. Anna ha comprato una sola cartella; Angelica ha comprato quattro cartelle; Dorina ha comprato tre cartelle; mentre Claudio fa il "tombolone", ovvero estrae di volta in volta un numero dal sacchetto contenente i 90 numeri, ponendoli su una tabella che riporta tutti i numeri da 1 a 90 (vedi figura sotto). Ciò è equivalente ad avere comprato 6 cartelle, come quelle evidenziate in figura. Ogni cartella costa 50 centesimi. Dunque, in totale sono stati raccolti 7 euro. Vengono fatti i seguenti premi: ambo (due numeri sulla stessa fila) 50 centesimi; terno (tre numeri sulla stessa fila) 80 centesimi; quaterna (4 numeri sulla stessa fila) 1 euro; cinquina (5 numeri sulla stessa fila) 1,20 euro; tombola (tutti i numeri di una cartella) 3,50 euro.

9	14	21					76	86
	19		35	40	56	60		
		26		41	57	62		89

Esempio di cartella

Tombolone									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

1. Il gioco inizia e Claudio estrae il numero 23. Qual è la probabilità che Anna abbia tale numero sulla propria cartella?
2. Qual è la probabilità che Angelica abbia il numero 23 su almeno una delle sue cartelle?
3. Viene estratto il secondo numero: 59. Qual è la probabilità che Anna abbia fatto ambo? (Si ricordi che fare ambo significa avere due numeri sulla stessa fila).
4. Dorina all'inizio del gioco disse di ricordare vagamente che in passato la sua nipotina aveva nascosto i numeri dall'81 fino al 90. Tuttavia, data la scarsa affidabilità di Dorina, stimata al 5% (in altri termini, ci sono soltanto i numeri dall'1 all'80 con una probabilità del 5%), nessuno ha controllato che quei numeri fossero presenti. Ora, dopo 40 estrazioni non è uscito nessuno di quei numeri. Forse Dorina aveva ragione? Che probabilità attribuireste adesso a Dorina?
5. Determinare il valore atteso di vincita per Anna, dando una dimostrazione della correttezza del risultato.

Esercizio 3

Dorina aveva ragione! (vedi punto 4. dell'Esercizio 2) Nel sacchetto mancavano i numeri dall'81 al 90. Dopo aver rintracciato la nipotina, finalmente riescono a recuperare quei numeri. Claudio li mette nel sacchetto e decide che inizierà un nuovo giro al gioco della tombola soltanto se come primo numero uscirà proprio uno tra 81 e 90. Fino a quando uno tra questi numeri non uscirà, continuerà a rimettere il numero estratto nel sacchetto.

1. Anna è impaziente di riprendere il gioco. Quante estrazioni dovrà attendere in media prima di iniziare a giocare?
2. Si assuma che Claudio esegua 90 estrazioni, continuando anche nel caso in cui ha estratto uno di quei numeri. Qual è la probabilità di ottenerne più di 8 e meno di 12?
3. Si calcoli la precedente probabilità facendo uso dell'approssimazione normale. È stata una buona approssimazione?
4. Quante estrazioni dovrebbe fare Claudio affinché la probabilità di ottenere più di 10 numeri tra quelli richiesti sia superiore al 50%?
5. Si individui quale dovrebbe essere l'intervallo centrato attorno alla media, affinché la probabilità, calcolata per quell'intervallo, sia del 95%.

Esercizio 4

Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - ax & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + ax & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Determinare per quale valore del parametro a la funzione f rappresenta una densità di probabilità.
2. Sia X la variabile aleatoria associata ad f . Calcolare la probabilità che X sia maggiore di $1/2$.
3. Determinare il valore atteso e la varianza di X .